

## 2.2. Optique géométrique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1.  $x_0 = (0, 0)$
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

De plus, en utilisant l'hypothèse  $x_0 \in \bar{S}_3$ , on peut trouver un point  $x_3 = (y_3, 0) \in \Omega$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$ . Nous pouvons alors écrire notre opérateur  $L + c_0$  sous une forme encore plus précise que celle donnée par le point 3. ci-dessus, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 2.1.** *Supposons que  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  et que  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$  pour un point  $x_3 \in S = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Alors, pour tout voisinage  $\Omega$  de  $x_3$ , il existe un point  $x_2 \in \Omega \cap S$ , un voisinage  $\omega$  de  $x_2$  et des entiers  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 > 0$  tels que  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  et  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  dans  $\omega$  avec  $(b_1(x_2), b_2(x_2))$  linéairement indépendants.*

*Démonstration.* On peut déjà supposer que  $\Omega$  est suffisamment petit pour que le rang de  $\mathcal{L}$  reste supérieur ou égal à 3 dans  $\Omega \cap S$ .

Soit  $k_1 = \inf \{k \geq 0 \mid \exists x \in \Omega \cap S : \partial_t^k b(x) \neq 0\}$ . Alors  $k_1 < \infty$  car  $\text{rg } \mathcal{L}(x_3) \geq 3$ . Soit donc  $x_1$  un point de  $\Omega \cap S$  tel que  $\partial_t^{k_1} b(x_1) \neq 0$ , et soit  $\omega \subset \Omega$  un voisinage de  $x_1$  tel que  $\partial_t^{k_1} b(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \omega \cap S$ . Dans  $\omega$ , on a  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  avec  $b_1(x) \neq 0$  si  $x \in S$ .

Soit maintenant  $k_2 = \inf \{k > 0 \mid \exists x \in \omega \cap S : \partial_t^k b_1(x) \text{ et } b_1(x) \text{ soient linéairement indépendants}\}$ . Alors  $k_2 < \infty$  car  $\text{rg } \mathcal{L}(x_1) \geq 3$ . On peut donc écrire dans  $\omega$ ,  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  et il existe un point  $x_2 \in \omega \cap S$  tel que  $b_1(x_2)$  et  $b_2(x_2)$  soient linéairement indépendants.

Ce lemme nous permettra donc de déduire le théorème 1.1 du théorème suivant (que nous démontrerons aux paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

**Théorème 2.2.** *Supposons que  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$ , que  $b : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$  et  $c : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  sont des fonctions  $C^\infty$  dans un voisinage  $\Omega$  de  $x_0 = (y_0, 0)$  et qu'il existe des entiers  $k_1 \geq 0$  et  $k_2 > 0$  tels que  $b(y, t) = t^{k_1} b_1(y, t)$  et  $b_1(y, t) = b_1(y, 0) + t^{k_2} b_2(y, t)$  dans  $\Omega$  avec  $(b_1(x_0), b_2(x_0))$  linéairement indépendants. Alors il existe un voisinage  $\omega$  de  $x_0$ ,  $u \in C^\infty(\omega)$  et  $a \in C^\infty(\omega)$  vérifiant (1.1).*

## 2.2. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Nous dirons que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^n \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  si  $w(x, \delta)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}^n \times [0, \infty[$ , indéfiniment dérivable en  $x$  pour  $\delta > 0$  et dont les dérivées restent bornées quand  $\delta$  tend vers 0.

PROPOSITION 2.3. Sous les hypothèses du théorème 2.2, il existe au voisinage de  $(y_0, 0, 0)$  deux fonctions  $\varphi$  et  $\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  telles que

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1}(t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta) & \text{pour } \delta > 0 \\ \beta(y_0, 0, 0) = \beta_0 > 0 \end{cases}$$

et telles que pour toute fonction  $\gamma \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ , il existe une fonction  $w(y, s, \varepsilon) \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  telle que  $w(y, 0, 0) = 1$  et

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \forall v \in \mathbf{N}, \exists \delta_{\alpha, v}: & \text{pour } 0 < \delta < \delta_{\alpha, v} \text{ et} \\ & \text{pour } (y, \delta^{-2}(t-\delta)) \text{ dans un voisinage fixe de } (y_0, 0) \\ & \text{(indépendant de } \alpha \text{ et } v) \\ |\partial^\alpha[(L+c_0)h/h]| \leq 2\delta^v \end{cases}$$

où on a posé :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & h(y, t, \delta) \\ = & w(y, \delta^{-2}(t-\delta), \delta^{1/3}) \exp[-\delta^{-5/3} \gamma(y, \delta) + \delta^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta)] \end{aligned}$$

(dans (2.2),  $\partial^\alpha$  désigne la dérivation d'ordre  $\alpha$  par rapport à  $y$  et  $t$ ).

Démonstration: en trois parties.

1. Construction de  $\varphi$  et de  $\beta$ . Choisissons  $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n-1}$  tel que  $b_1(x_0) \cdot \eta_0 = 0$  et  $b_2(x_0) \cdot \eta_0 < 0$  (ce qui est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance). Il existe alors une fonction  $C^\infty$  à valeurs réelles  $\psi_1$  telle que

$$\begin{cases} b_1(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \\ \partial_y \psi_1(y_0, 0) = \eta_0 \end{cases}$$

et on pose :

$$\begin{aligned} \psi_2(y, t, \delta) &= \int_\delta^t b(y, r) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) dr, \\ \varphi(y, t, \delta) &= \psi_2(y, t, \delta) + i\psi_1(y, \delta). \end{aligned}$$

On calcule alors que :

$$\psi_2(y, \delta, \delta) = 0,$$

$$\partial_t \psi_2(y, \delta, \delta) = b(y, \delta) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) = 0 \text{ par choix de } \psi_1, \text{ et}$$

$$\partial_t^2 \psi_2(y, t, \delta) = \partial_t b(y, t) \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ k_1 t^{k_1-1} b_1(y, 0) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \left[ -k_1 t^{k_1-1} \delta^{k_2} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) t^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) + t^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) \\
&= \delta^{k_1+k_2-1} \left[ -k_1 \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1-1} b_2(y, \delta) + (k_1 + k_2) \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2-1} b_2(y, t) \right. \\
&\quad \left. + \delta \left( \frac{t}{\delta} \right)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, t) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta).
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient donc

$$\operatorname{Re} \varphi(y, t, \delta) = \psi_2(y, t, \delta) = -\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

où

$$\begin{aligned}
\beta(y, \sigma, \delta) = \int_0^1 (\theta-1) \left[ -k_1 (1+\theta\sigma)^{k_1-1} b_2(y, \delta) \right. \\
\quad \left. + (k_1 + k_2) (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2-1} b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right. \\
\quad \left. + \delta (1+\theta\sigma)^{k_1+k_2} \partial_t b_2(y, \delta(1+\theta\sigma)) \right] \cdot \partial_y \psi_1(y, \delta) d\theta
\end{aligned}$$

ce qui donne (2.1) puisque  $\beta(y_0, 0, 0) = -\frac{1}{2} k_2 b_2(y_0, 0) \cdot \eta_0 > 0$  grâce à notre choix de  $\eta_0$ .

Notons que

$$L\varphi(y, t, \delta) = -i\delta^{k_1+k_2-1} (t-\delta)^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta^{-1}(t-\delta), \delta)$$

par (2.1), et si on pose  $s = \delta^{-2}(t-\delta)$ ,

$$L[\delta^{-4-k_1-k_2} \varphi(y, t, \delta)] = -i\delta^{-1} s^2 b(y, t) \cdot \partial_y \beta(y, \delta s, \delta).$$

2. *Construction de  $w$ .* Définissons l'opérateur  $M$  par la relation  $(Mw/w) = ((L+c_0)h/h)$  où  $h$  est donnée par (2.3); on calcule alors que

$$Mw = \delta^{-2} [\partial_s w + \varepsilon Nw], \quad \text{avec} \quad Nw = iB \cdot \partial_y w + Cw,$$

où  $B$  et  $C$  sont des fonctions de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  définies par:

$$B(y, s, \varepsilon) = \varepsilon^5 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s),$$

$$C(y, s, \varepsilon) = -ib(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \gamma(y, \varepsilon^3) - i\varepsilon^2 s^2 b(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s) \cdot \partial_y \beta(y, \varepsilon^3 s, \varepsilon^3) + \varepsilon^5 c(y, \varepsilon^3 + \varepsilon^6 s).$$

Définissons une suite de fonctions  $w_j$  de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  par les formules (toutes ces fonctions sont bien définies sur un même domaine)

$$w_0(y, s, \varepsilon) = 1,$$

$$w_{j+1}(y, s, \varepsilon) = \int_0^s -Nw_j(y, r, \varepsilon)dr, \quad \text{pour } j \geq 0.$$

Une solution de (2.2)-(2.3) est alors obtenue formellement en posant  $w = \sum \varepsilon^j w_j$ . Choisissons donc une fonction de troncature, c'est-à-dire une fonction  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$  telle que  $\chi = 1$  sur  $[0, 1]$ ,  $\chi = 0$  sur  $[2, +\infty[$  et  $\chi(\varepsilon) \in [0, 1]$  pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[$ . Nous posons

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \chi(\lambda_j \varepsilon) w_j(y, s, \varepsilon),$$

et nous allons prouver dans la troisième partie de cette démonstration qu'il existe une suite de réels positifs  $\lambda_j$  telle que cette formule définisse une fonction  $w$  de l'espace  $B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  qui vérifie de plus (2.2)-(2.3).

3. *Construction de la suite  $\lambda_j$ .* Nous allons montrer qu'il suffit que la suite  $\lambda_j$  croisse assez vite pour que l'on ait les deux propriétés précédentes. Nous pouvons déjà imposer que  $\lambda_{j+1} > 2\lambda_j$  de sorte que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, les  $\chi(\lambda_j \varepsilon)$  soient tous égaux à 1 ou à 0 sauf au plus l'un d'entre eux.

Soient  $k$  un voisinage compact de  $y_0$ ,  $s_0 > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que les fonctions  $w_j$  soient bien définies dans  $K = k \times [-s_0, s_0] \times [0, \varepsilon_0]$ . Pour obtenir que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$ , il suffit d'imposer pour tout  $J \in \mathbf{N}$ ,

$$\lambda_J > (J+1) \sup \{ |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \text{ et } j \leq J+1 \}$$

où  $D^\alpha$  désigne la dérivation d'ordre  $\alpha$  en  $y$  et  $s$ . En effet, si  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$w(y, s, \varepsilon) = \sum_{j=0}^J \varepsilon^j w_j(y, s, \varepsilon) + \varepsilon^{J+1} \chi(\lambda_{J+1} \varepsilon) w_{J+1}(y, s, \varepsilon)$$

donc si  $0 < |\alpha| \leq J$ ,  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  et  $(y, s, \varepsilon) \in K$ ,

$$|D^\alpha w(y, s, \varepsilon)| \leq \sum_{j=1}^{J+1} \varepsilon |D^\alpha w_j(y, s, \varepsilon)| \leq 1.$$

Il en résulte que  $w \in B^\infty(\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}_+)$  car  $w$  est continue sur  $K$  comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur  $K$ .

On a  $w(y, 0, 0) = 1$ , et si on a choisi le compact  $K$  assez petit, on a aussi  $|w| > \frac{1}{2}$  dans  $K$  (un tel compact  $K$  pourra être choisi après coup, une fois que les  $\lambda_j$  auront été fixés); il en résulte que  $|(D^\gamma w)/w|$  reste inférieur à 2 pour  $\varepsilon \leq (\lambda_{|\gamma|})^{-1}$ . Comme on peut écrire  $D^\alpha(Nw_j/w)$  comme une somme (algébrique) comportant au plus  $(|\alpha|+1)! \times 2$  termes de la forme  $[(D^\beta Nw_j)/w] [(D^{\gamma_1} w)/w] \dots [(D^{\gamma_{|\alpha|}} w)/w]$  (avec  $\alpha = \beta + \gamma_1 + \dots + \gamma_{|\alpha|}$ , par la formule de Leibniz), on obtient une majoration

$$|D^\alpha(Nw_j/w)| \leq (|\alpha|+1)! 2^{|\alpha|+2} \sup \{|D^\beta Nw_j| \mid \beta \leq \alpha\}$$

pourvu que  $\varepsilon \leq (\lambda_{|\alpha|})^{-1}$ . Si donc nous demandons pour tout  $J$  que

$$\lambda_j > (J+1)! 2^{J+2} \sup \{|D^\alpha Nw_j(y, s, \varepsilon)| \mid (y, s, \varepsilon) \in K, |\alpha| \leq J \\ \text{et } j \leq J+1\},$$

alors pour  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$Mw = \varepsilon^{J-5} [Nw_J(1 - \chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)) + Nw_{J+1}\varepsilon\chi(\lambda_{J+1}\varepsilon)]$$

d'où  $|D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{J-6}$  pour  $|\alpha| \leq J$  (et  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  et  $(y, s, \varepsilon) \in K$ ). Cette majoration étant obtenue pour tout  $J$ , on peut remplacer la condition  $(\lambda_{J+1})^{-1} \leq \varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$  par  $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ .

Pour  $\alpha \in \mathbf{N}^n$  et  $\nu \in \mathbf{N}$  fixés, on obtient, en posant  $J = 6(1+|\alpha|) + 3\nu$ , que pour  $(y, s, \varepsilon) \in K$  et  $\varepsilon \leq (\lambda_J)^{-1}$ ,

$$|\partial^\alpha((L+c_0)h/h)| = |\varepsilon^{-6\alpha} D^\alpha(Mw/w)| \leq 2\varepsilon^{3\nu} = 2\delta^\nu.$$

### 2.3. AJUSTEMENT DES FONCTIONS $u_k$

Nous posons

$$\delta_k = k^{-3/4}, l_k = \delta_k - \delta_{k+1} \left( \sim \frac{3}{4} k^{-7/4} \right) \quad \text{et} \quad m_k = \frac{1}{3} \delta_k + \frac{2}{3} \delta_{k+1}.$$

Puis nous considérons les fonctions  $h_k(y, t) = h(y, t, \delta_k)$  définies par (2.3); ces fonctions vérifient (2.2) pour  $k$  suffisamment grand et  $t \in ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[$  pourvu que  $\delta_k^{-2} l_k$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, ce qui est bien le cas puisque  $\delta_k^{-2} l_k \sim \frac{3}{4} k^{-1/4}$ .

En vue de poser  $u = h_k + h_{k+1}$  pour  $t$  voisin de  $m_k$  et de montrer que  $a = -(L+c_0)u/u$  est  $C^\infty$ , il nous faut déterminer le lieu d'équation  $h_{k+1} = -h_k$  (qui est contenu dans le lieu d'équation  $|h_{k+1}| = |h_k|$ ).