

# §5. The trace

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1986)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 5. THE TRACE

The fundamental idea of V. Jones which led him to the definition of his original one-variable polynomial is the construction of the trace. Originally, V. Jones used algebras which are quotients of the algebras  $H_n$ . The lifting of the trace to the Hecke algebras  $H_n$  was observed by A. Ocneanu.

The trace will commute with the inclusion  $H_n \rightarrow H_{n+1}$  and therefore yield a trace on the direct limit of the  $H_n$ 's. (Compare with the discussion in § 12.)

**THEOREM.** *Let  $K$  be a field and let  $q, z \in K$  be two elements of  $K$ . Let  $H_n$  be the Hecke algebra over  $K$  corresponding to  $q$ . There exists a trace  $\text{Tr}: H_n \rightarrow K$  compatible with the inclusion  $H_n \rightarrow H_{n+1}$ , i.e. the diagram*

$$\begin{array}{ccc} H_n & \xrightarrow{\quad} & H_{n+1} \\ & \searrow \text{Tr} & \swarrow \text{Tr} \\ & & K \end{array}$$

*commutes, and such that*

- (1)  $\text{Tr}(1) = 1$ ,
- (2)  $\text{Tr}$  is  $K$ -linear and  $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$ ,
- (3) If  $a, b \in H_n$ , then  $\text{Tr}(aT_n b) = z\text{Tr}(ab)$ .

Notice that the last property enables us to calculate  $\text{Tr}(x)$  for an arbitrary  $x \in H_n$  by using the fact that monomials in normal form generate  $H_n$  over  $K$ . For instance,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_1) &= z, \\ \text{Tr}(T_1 T_2) &= \text{Tr}(T_2 T_1) = z^2, \\ \text{Tr}(T_1 T_2 T_1) &= z\text{Tr}(T_1^2) = z((q-1)z + q). \end{aligned}$$

*Proof.* The  $K$ -linear map  $\text{Tr}: H_{n+1} \rightarrow K$  is defined by induction on  $n$ , using the structure lemma of § 4 (Proposition 4.1):

$$\varphi: H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n \xrightarrow{\sim} H_{n+1}.$$

Starting with  $\text{Tr}: H_0 = K \rightarrow K$  the identity, one defines  $\text{Tr}: H_{n+1} \rightarrow K$  by  $\text{Tr}(x) = \text{Tr}(a) + \sum_i z \text{Tr}(b_i c_i)$ , if  $\varphi(a + \sum_i b_i \otimes c_i) = x$ .

It is clear that if  $a, b \in H_n$ , then

$$\text{Tr}(aT_n b) = z \text{Tr}(ab),$$

since  $\varphi(a \otimes b) = aT_n b$ .

The only statement to be proved is then:

$$\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx) \quad \text{for all } x, y \in H_{n+1}.$$

This is proved by induction on  $n$ .

We may assume that  $x$  and  $y$  are monomials containing  $T_n$  at most once.

If  $y$  does not contain  $T_n$  at all, then writing  $x = x' T_n x''$ , where  $x', x''$  are monomials in  $T_1, \dots, T_{n-1}$ , one has

$$\text{Tr}(xy) = z \text{Tr}(x' x'' y) = z \text{Tr}(y x' x'') = \text{Tr}(y x' T_n x'') = \text{Tr}(y x).$$

If  $y$  contains  $T_n$ , it suffices to check the case where  $x = a T_n b$  and  $y = T_n$ , as is easily verified. (Here  $a, b \in H_n$ .)

There are various cases depending on whether or not the elements  $a$  and  $b$  actually contain  $T_{n-1}$ . The worst case is the one in which  $a = a' T_{n-1} a''$ ,  $b = b' T_{n-1} b''$  with  $a', a'', b', b''$  belonging to  $H_{n-1}$ . We have then

$$\begin{aligned} \text{Tr}(a T_n b T_n) &= z((q-1)\text{Tr}(ab) + q\text{Tr}(ab' b'')) \\ \text{Tr}(T_n a T_n b) &= z((q-1)\text{Tr}(ab) + q\text{Tr}(a' a'' b)). \end{aligned}$$

But

$$\text{Tr}(ab' b'') = \text{Tr}(a' T_{n-1} a'' b' b'') = z \text{Tr}(a' a'' b' b''),$$

and

$$\text{Tr}(a' a'' b) = \text{Tr}(a' a'' b' T_{n-1} b'') = z \text{Tr}(a' a'' b' b'').$$

Hence,

$$\text{Tr}(a T_n b T_n) = \text{Tr}(T_n a T_n b)$$

as desired.