

# 10. Another fruit of the Perron tree. A PROBLEM ON DOUBLE FOURIER SERIES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

the sets become smaller and smaller, the mean density approaches a number, the density at the point. The Nikodym set shows in an easy way that one has to be very careful at choosing *reasonable sets*. As Zygmund observed (see the end of Nikodym's paper in 1927), it follows from the Nikodym set that if we take something apparently so reasonable as the system of all rectangles centered at the corresponding points, the mean densities can diverge. This, however, does not happen if the system is that of all circles or squares containing the points. Considerations of this type have given rise to the modern theory of differentiation of integrals.

#### 10. ANOTHER FRUIT OF THE PERRON TREE. A PROBLEM ON DOUBLE FOURIER SERIES

A famous problem in Fourier analysis, open for a long time, has been recently solved in a rather simple way by the use of the Perron tree.

For a periodic function of two variables  $f(x, y)$  of period 1 in each variable one can define its Fourier coefficients setting for  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$a_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-2\pi imx} e^{-2\pi iny} dx dy$$

and one can construct the corresponding Fourier series

$$\sum_{m, n} a_{mn} e^{2\pi imx} e^{2\pi iny}.$$

One can consider the partial sums of this series in several ways, in order to explore whether they converge or not to the original function. Thus, for example, one can consider the "square" sums

$$S_P f(x, y) = \sum_{\substack{|m| < P \\ |n| < P}} a_{mn} e^{2\pi imx} e^{2\pi iny}$$

or else the "rectangular" sums

$$S_{M, N} f(x, y) = \sum_{\substack{|m| < M \\ |n| < N}} a_{mn} e^{2\pi imx} e^{2\pi iny}$$

and examine whether in some sense  $S_P f \rightarrow f$  as  $P \rightarrow \infty$  or  $S_{M, N} f \rightarrow f$  as  $M, N \rightarrow \infty$ . One can also consider the "circular" sums

$$S^R f(x, y) = \sum_{m^2 + n^2 \leq R^2} a_{mn} e^{2\pi imx} e^{2\pi iny}$$

As a consequence of the construction of the Perron tree one can prove, for example, that there are functions  $f \in L^p$ ,  $1 < p < 2$ , such that  $S^R f(x, y)$  diverges at almost each point  $(x, y)$ . For this result we refer to the papers by C. Fefferman in 1970 and 1971.

Our short excursion comes to confirm what happens so often in Mathematics. Apparently idle and superfluous questions give rise to very interesting and important portions of mathematics, useful in many respects. As Littlewood used to say, a good mathematical game is worth many theorems.

#### REFERENCES

- BESICOVITCH, A. S. [1919]. Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions. *J. Soc. Phys.-Math. (Perm)* 2 (1919-1920), 105-123.
- [1928]. On Kakeya's problem and a similar one. *Math. Z.* 27 (1928), 312-320.
- DAVIES, R. O. [1953]. *Accessibility of plane sets and differentiation of functions of two variables* (Ph.D. Dissertation, Cambridge Univ. 1953).
- FEFFERMAN, C. [1970]. Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math.* 124 (1970), 9-36.
- [1971]. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math. (2)* 94 (1971), 330-336.
- DE GUZMÁN, M. [1975]. *Differentiation of integrals in  $\mathbf{R}^n$* . Springer, Berlin, 1975.
- [1981]. *Real variable methods in Fourier Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- KAKEYA, S. [1917]. Some problems on maxima and minima regarding ovals. *Tôhoku Sci. Reports* 6 (1917), 71-88.
- NIKODYM, O. [1927]. Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles. *Fund. Math.* 10 (1927), 116-168.
- PERRON, O. [1928]. Über einen Satz von Besicovitch. *Math. Z.* 28 (1928), 383-386.
- RADEMACHER, H. [1962]. On a theorem of Besicovitch. In: *Studies in Mathematical Analysis* (edited by Gilbarg, Solomon and others), Stanford, 1962, 294-296.

(Reçu le 18 février 1982)

Miguel de Guzmán

Universidad Complutense  
Madrid 3  
Spain