

3. The theory of the highest weight

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. THE THEORY OF THE HIGHEST WEIGHT

Before decomposing the $\mathfrak{sl}_2$ -space $\mathcal{A}$ we must review the finite dimensional representation theory of $\mathfrak{sl}_2$.

The *weight vectors* of an $\mathfrak{sl}_2$ -representation W are the eigenvectors of H in W . The *weights* of W are the eigenvalues of its nonzero weight vectors.

Every finite dimensional $\mathfrak{sl}_2$ -module is spanned by its weight vectors. The weights of such a representation are all integers and are thus ordered by the usual order on $\mathbf{R}$. The largest of a finite set of integral weights is traditionally referred to as the *highest weight*.

Two finite dimensional irreducible $\mathfrak{sl}_2$ -representations are isomorphic if and only if they have the same highest weights, which are necessarily nonnegative.

The element $X^a Y^b$ of V is a weight vector of weight $a-b$. This shows that X^m is a vector of highest weight m in V_m and therefore that the V_m for $m \geq 0$ form a set of representatives of the equivalence classes of finite dimensional irreducible $\mathfrak{sl}_2$ -representations; which is precisely why we are studying them is this paper.

The last general fact which we will recall without proof is this: every finite dimensional representation of $\mathfrak{sl}_2$ is a direct sum of irreducible representations.

Given a representation W of $\mathfrak{sl}_2$ which is a sum of finite dimensional representations one often wishes to write it explicitly as a direct sum of irreducible representations, that is, of representations isomorphic to the V_m . A method for doing this is provided by the observation that the space of weight vectors of highest weight in V_m is the space annihilated by E_+ and is one dimensional. Thus for each $v \in W$ of weight m such that $E_+ v = 0$, there is a unique $\mathfrak{sl}_2$ -homomorphism from V_m to W taking X^m to v . The explicit decomposition of W therefore amounts to the determination of a basis consisting of weight vectors of the kernel of E_+ in W .

4. THE DECOMPOSITION OF $\mathcal{A}$

We apply the procedure of the last paragraph to the representation of $\mathfrak{sl}_2$ on $\mathcal{A}$. By definition of ρ the kernel of $\rho(E_+)$ is just the commutant of E_+ in $\mathcal{A}$.

Let $\mathcal{B}$ be the subalgebra of $\mathcal{A}$ generated by X , ∂_Y , and J .