PROPOS DES ÉQUATIONS ANTIPELLIENNES

Autor(en): **Kaplan, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-52984

L'Enseignement Mathématique, t. 29 (1983), p. 323-328

A PROPOS DES ÉQUATIONS ANTIPELLIENNES

par Pierre KAPLAN

Soit m un entier positif non divisible par un carré. Les équations antipelliennes sont les équations

$$T^2 - mU^2 = \delta \tag{1}$$

où δ est un diviseur sans diviseur carré et >1 du discriminant Δ du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$. Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration du fait suivant:

PROPOSITION. *Le nombre* m *étant donné, il existe exactement un nombre* δ *tel que l'équation* (1) *soit résoluble.*

Nous noterons δ_0 le nombre δ tel que l'équation (1) soit résoluble.

On voit immédiatement que l'équation $X^2 - mY^2 = -1$ est résoluble si, et seulement si, $\delta_0 = m$.

L'importance de cette proposition a été notée par G. Pall [6] et de notre côté, nous l'avons utilisée notamment dans [3], [4] et [5].

La proposition a été jusqu'à présent démontrée à partir de la théorie des formes quadratiques binaires de Gauss de la manière suivante. D'après [2], § 158 ou bien [1], § 153, toute classe de formes de déterminant m et d'ordre 1 ou 2 pour la composition représente exactement deux diviseurs sans diviseurs carrés et $\geqslant 1$ de Δ, donc, en particulier, la classe de $X^2 - mY^2$, qui représente déjà 1, représente un autre de ces diviseurs, δ_0. Cette démonstration utilise la théorie de la réduction des formes quadratiques binaires indéfinies.

Au contraire, notre démonstration repose uniquement sur la propriété suivante des solutions de l'équation de Pell

$$R^2 - mS^2 = 1: \tag{2}$$

Si (R_0, S_0) désigne la solution de (2) où R_0 et S_0 sont strictement positifs et minimaux et si (R, S) est une solution de (1) où R et S sont strictement positifs, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$R + S\sqrt{m} = (R_0 + S_0\sqrt{m})^k. \tag{3}$$

Nous poserons

$$(4) \qquad \eta_0 = R_0 + S_0\sqrt{m}$$

et démontrerons le résultat suivant, qui précise la proposition.

THÉORÈME. *Soit* m *un entier positif non divisible par un carré.*

1) *Parmi les équations*

$$(5) \qquad dV^2 - eW^2 = t$$

où t, d, e *sont des entiers positifs vérifiant*

$$(6) \qquad \begin{cases} t = 1 \quad si \quad m \not\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4),\ t = 1 \quad ou \quad 2 \quad si \quad m \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4), \\ de = m,\ dt \neq 1, \end{cases}$$

une et une seule a des solutions entières (V, W).

2) *Soit*

$$(5_0) \qquad d_0 V^2 - e_0 W^2 = t_0$$

celles des équations (5) *qui est résoluble et soit* (V_0, W_0) *la solution de* (5_0) *où* V_0 *et* W_0 *sont positifs et minimaux. Posons*

$$(7) \qquad \varepsilon_0 = \frac{V_0\sqrt{d_0 t_0} + W_0\sqrt{e_0 t_0}}{t_0}.$$

Alors

$$(8) \qquad \varepsilon_0^2 = \eta_0 .$$

Remarques.

1) La condition $dt \neq 1$ de (6) signifie que l'équation (5) ne peut être l'équation de Pell (2).

2) On passe de l'équation (5_0) à l'équation (1) résoluble en multipliant par d_0, c'est-à-dire que $\delta_0 = d_0 t_0$, $T = d_0 V$, $U = W$. Inversement, si

$$T^2 - mU^2 = \delta_0 ,$$

on a $\delta_0 = d_0 t_0$ où $d_0 \mid m$ et $t_0 = 1$ ou 2. Alors $T = d_0 V$ et divisant par d_0, on trouve l'équation (5_0) avec $W = U$.

3) Dans [5], lemma 1, p. 360, le théorème est démontré à partir de la proposition et des applications du théorème sont faites.

Démonstration du théorème. Considérant la relation

$$R_0^2 - mS_0^2 = 1 \text{ modulo } 4 ,$$

on voit que R_0 et S_0 ont des parités différentes et que R_0 est impair si $m \not\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Si $m \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$, il arrive que R_0 soit pair, par exemple $2^2 - 3.1^2 = 1$, ou bien impair, par exemple $25^2 - 39.4^2 = 1$.

Supposons d'abord R_0 impair. L'équation $R_0^2 - mS_0^2 = 1$ s'écrit

$$\frac{R_0+1}{2}\frac{R_0-1}{2} = m\left(\frac{S_0}{2}\right)^2. \tag{9}$$

Les entiers $\frac{R_0+1}{2}$ et $\frac{R_0-1}{2}$ étant premiers entre eux, il existe des entiers d_0 et e_0 positifs tels que $d_0e_0 = m$ et des entiers $V_0 > 0$ et $W_0 > 0$ tels que $V_0W_0 = \frac{S_0}{2}$, $\frac{R_0+1}{2} = d_0V_0^2$ et $\frac{R_0-1}{2} = e_0W_0^2$, d'où

$$1 = d_0V_0^2 - e_0W_0^2 \tag{10}$$

$$R_0 = d_0V_0^2 + e_0W_0^2;\ S_0 = 2V_0W_0. \tag{11}$$

Comme $W_0 < S_0$, on a $d_0 > 1$.

Supposons maintenant R_0 pair. L'équation $R_0^2 - mS_0^2 = 1$ s'écrit

$$(R_0+1)(R_0-1) = mS_0^2. \tag{9'}$$

Les entiers impairs $R_0 + 1$ et $R_0 - 1$ ont pour différence 2, donc sont premiers entre eux, donc il existe des entiers d_0 et e_0 positifs tels que $d_0e_0 = m$ et des entiers V_0 et W_0 positifs tels que $V_0W_0 = S_0$, $R_0 + 1 = d_0V_0^2$ et $R_0 - 1 = e_0W_0^2$, d'où

$$2 = d_0V_0^2 - e_0W_0^2 \tag{10'}$$

$$2R_0 = d_0V_0^2 + e_0W_0^2;\ S_0 = V_0W_0. \tag{11'}$$

Posons $t = 1$ si R_0 est impair, $t = 2$ si R_0 est pair.

Alors les relations (11) si R_0 est impair, (11′) si R_0 est pair montrent que ε_0 défini par (7) vérifie (8).

Nous avons donc trouvé l'équation (5_0) ayant des solutions, à savoir (10) si R_0 est impair, (10′) si R_0 est pair. Notons que cette relation (5_0) entraîne

$$\varepsilon_0^{-1} = \frac{V_0\sqrt{d_0t_0} - W_0\sqrt{e_0t_0}}{t_0}. \tag{12}$$

Pour achever la démonstration du théorème, nous allons montrer que si une équation (5) vérifiant (6) a une solution positive (V, W), alors $t = t_0, d = d_0$, $e = e_0$, $V \geqslant V_0$ et $W \geqslant W_0$. Posons

$$(13)\qquad R = \frac{dV^2 + eW^2}{t},\ S = \frac{2VW}{t},\ \varepsilon = \frac{V\sqrt{dt} + W\sqrt{et}}{t}.$$

On vérifie que $\varepsilon^2 = R + S\sqrt{m}$ et que $R^2 - mS^2 = 1$.

D'après (3) et (8), il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\varepsilon^2 = \eta_0^k = \varepsilon_0^{2k}$, donc, comme ε et ε_0 sont des nombres réels positifs, on a

$$(14)\qquad \varepsilon = \varepsilon_0^k .$$

Développant ε_0^k en tenant compte de ce que $\varepsilon_0^2 = R_0 + S_0\sqrt{m}$ et aussi de (12), on voit qu'il existe des entiers positifs t_1, d_1, e_1, V_1 et W_1 tels que

$$(15)\qquad \varepsilon = \frac{V_1\sqrt{d_1t_1} + W_1\sqrt{e_1t_1}}{t_1};\ \varepsilon^{-1} = \frac{V_1\sqrt{d_1t_1} - W_1\sqrt{e_1t_1}}{t_1}$$

avec

$$(16)\qquad (t_1, d_1, e_1) = \begin{cases}(1, 1, m) & \text{si } k \text{ est pair}\\ (t_0, d_0, e_0) & \text{si } k \text{ est impair.}\end{cases}$$

Les équations (5) et (13) montrent que

$$(17)\qquad \varepsilon^{-1} = \frac{V\sqrt{dt} - W\sqrt{et}}{t}.$$

De (13), (15) et (17) résulte en particulier que

$$\frac{V_1}{t_1}\sqrt{d_1t_1} = \frac{V}{t}\sqrt{dt}.$$

Ceci n'est possible que si $d\,d_1\,t\,t_1$ est le carré d'un entier.

Si $m \not\equiv -1 \pmod 4$, $d\,d_1$ est un carré, donc, comme ni d ni d_1 n'a de diviseur carré, $d = d_1$, et, comme $d \neq 1$, (16) montre que $d = d_0$, $e = e_0$ et k est impair.

Si $m \equiv -1 \pmod 4$, d et d_1 sont impairs, donc $t = t_1$, donc $d\,d_1$ est un carré, donc ici encore $d = d_1$. Comme $dt \neq 1$, (16) montre que $t = t_0$, $d = d_0$, $e = e_0$ et k est impair.

Donc $\varepsilon = \varepsilon_0^k$ avec k impair $\geqslant 1$, ce qui entraîne, puisque $\varepsilon_0 > 1$

$$\varepsilon = \frac{V\sqrt{d_0t_0} + W\sqrt{e_0t_0}}{t_0} \geqslant \frac{V_0\sqrt{d_0t_0} + W_0\sqrt{e_0t_0}}{t_0} = \varepsilon_0 .$$

Comme (V, W) et (V_0, W_0) sont deux solutions positives de la même équation (5_0), on a $V \geqslant V_0$ et $W \geqslant W_0$. Ceci achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] DIRICHLET, P. G. L. und R. DEDEKIND. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Chelsea Publishing Company, New York (1968).

[2] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae, Arithmetische Untersuchungen*. Chelsea (1965).

[3] KAPLAN, P. Sur le 2-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques. *J. Reine Angew. Math. 283/284* (1976), 313-363.

[4] KAPLAN, P. and K. S. WILLIAMS. An Artin character and representations of primes by binary quadratic forms. *Manuscripta Mathematica, 33* (1981), 339-356.

[5] HALTER-KOCH, F., P. KAPLAN and K. S. WILLIAMS. An Artin character and representations of primes by binary quadratic forms II. *Manuscripta Mathematica, 37* (1982), 357-381.

[6] PALL, G. Discriminantal divisors of binary quadratic forms. *Journal of Number Theory, 1* (1969), 525-533.

(Reçu le 20 janvier 1983)

Pierre Kaplan

Université de Nancy I
France