

## 4.1. Corps tchébychéviens non ramifiés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

donc  $a_{\frac{p-1}{l}}/2$  est une puissance  $l$ -ième modulo  $p$  et donc  $\xi$ , qui est congru à  $a_{\frac{p-1}{l}}/2$  modulo  $p$ , est une puissance  $l$ -ième modulo  $p$ . On conclut en remarquant que, s'il existe un  $k$  divisant  $\frac{p-1}{l}$  tel que  $p$  divise  $b_k$ , alors  $p$  divise  $b_{\frac{p-1}{l}}$ . Pour terminer notre démonstration il ne reste plus que le cas  $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$  et  $p \equiv -1 \pmod{l}$ . Dans ce cas, il y a un seul idéal premier de  $K$  au-dessus de  $p$ , notons le  $\mathfrak{p}$ . Si  $\xi$  est une puissance  $l$ -ième modulo  $\mathfrak{p}$ , alors  $\xi^{\frac{p+1}{l}}$  est congru à un rationnel modulo  $\mathfrak{p}$ ; mais  $\sqrt{d}$  n'est pas congrue à un rationnel modulo  $\mathfrak{p}$ , donc  $p$  divise  $b_{\frac{p+1}{l}}$ . Réciproquement, si  $p$  divise  $b_{\frac{p+1}{l}}$ , alors  $\xi^{\frac{p+1}{l}}$  est congru à un rationnel modulo  $\mathfrak{p}$ , donc  $\xi^{\frac{p+1}{l}(p-1)}$  est congru à 1 modulo  $\mathfrak{p}$  ce qui implique que  $\xi$  est une puissance  $l$ -ième modulo  $\mathfrak{p}$ . Enfin, on conclut comme précédemment en remarquant que, si il existe un  $k$  divisant  $\frac{p+1}{l}$  tel que  $p$  divise  $b_k$ , alors  $p$  divise  $b_{\frac{p+1}{l}}$ .

#### 4) APPLICATIONS

##### 4.1. Corps tchébychéviens non ramifiés

Nous allons étudier les corps tchébychéviens dont la clôture galoisienne  $N$  est non ramifiée sur  $L$ . L'existence de tels corps implique la divisibilité par  $l$  du nombre de classes du corps  $L$ ; nous reviendrons sur cet aspect aux paragraphes 4.2 et 4.3. On a le théorème suivant:

**THÉORÈME 4.1.1.** Soit  $\xi = \frac{1}{2}(a+b\sqrt{d})$  un entier du corps  $K$  dont la norme est la puissance  $l$ -ième d'un entier rationnel impair  $M$ . Si les trois conditions suivantes sont vérifiées : 1) le polynôme  $P_1(X; M) - a$  n'a pas

de racines rationnelles ; 2)  $l^2$  divise le produit  $bd$ , 3) le p.g.c.d de  $a$  et  $b$  est 1 ou 2, alors  $\xi$  définit un corps tchébychévien  $T$  dont la clôture galoisienne  $N$  est non ramifiée sur  $L$ . Réciproquement, si  $T$  est un corps tchébychévien dont la clôture galoisienne est non ramifiée sur  $L$ , alors il existe un entier quadratique  $\xi = \frac{1}{2} (a + b\sqrt{d})$  de norme  $M^l$  avec  $M$  impair qui définit  $T$  et qui vérifie les conditions 1), 2) et 3) énoncées ci-dessus.

*Démonstration.* Supposons 1), 2) et 3) vérifiées. Le lemme 1.1.2 et la condition 1) montrent que  $\xi$  n'est pas une puissance  $l$ -ième dans  $K$ , donc que  $\xi$  définit un corps tchébychévien  $T$ . Les conditions 2) et 3) montrent que  $l$  divise  $b$  mais ne divise pas  $a$ ; en conséquence  $l$  ne divise pas  $M$  et donc l'idéal engendré par  $\xi$  est premier à  $l$ . L'entier quadratique  $\xi$  vérifie donc la condition imposée au début de la partie 2) de ce travail et nous pouvons employer les résultats de cette partie. La condition 3) signifie que  $\xi$  n'est divisible par aucun nombre rationnel différent de  $\pm 1$ , donc la proposition 2.2.6 montre que seuls les idéaux premiers de  $L$  qui divisent  $l$  peuvent se ramifier dans la clôture galoisienne  $N$  de  $T$ . Le lemme 2.1.1 et la proposition 2.2.1 montrent que  $\xi$  est  $l$ -primaire, ce qui implique que les idéaux premiers de  $L$  au-dessus de  $l$  ne sont pas ramifiés dans  $N/L$ . Enfin, l'extension  $N/L$  étant de degré impair, les places à l'infini de  $L$  ne peuvent pas se ramifier dans  $N$ , donc  $N/L$  est non ramifiée. Réciproquement, soit  $T$  un corps tchébychévien dont la clôture galoisienne  $N$  est non ramifiée sur  $L$ .

Soit  $\eta = \frac{1}{2} (\alpha + \beta\sqrt{d})$  un entier quadratique définissant  $T$ ; comme on l'a vu au début de la partie 2) de ce travail, on peut supposer que l'idéal principal  $(\eta)$  n'est divisible par la puissance  $l$ -ième d'aucun idéal premier de  $K$  qui divise  $l$ . L'extension  $N/L$  étant non ramifiée, l'idéal principal  $(\eta)$  engendré par  $\eta$  dans  $K$  est la puissance  $l$ -ième d'un idéal, donc  $\eta$  et  $l$  sont premiers entre eux et  $\eta$  est  $l$ -primaire; de plus, quitte à multiplier  $\eta$  par une puissance  $l$ -ième, on peut supposer que  $\eta$  est premier à 2. En vertu du lemme 2.1.1 et de la proposition 2.2.1 on peut, en remplaçant éventuellement  $\eta$  par une de ses puissances premières à  $l$  (ce qui, d'après la proposition 1.2.5, ne change pas le corps tchébychévien associé) supposer que  $l^2$  divise  $\beta d$ . Ecrivons alors  $\eta = c_1 c_2^l \xi$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont des entiers rationnels, ou  $c_1$  est sans puissance  $l$ -ième et où  $\xi = \frac{1}{2} (a + b\sqrt{d})$  est un entier de  $K$  qui n'est divisible par aucun entier rationnel différent de  $\pm 1$ . La norme de  $\eta$  étant

une puissance  $l$ -ième, on peut, en remplaçant éventuellement  $\eta$  par son carré (ce qui ne change pas le corps tchébychévien associé) supposer que les nombres premiers qui divisent  $c_1$  sont décomposés dans le corps  $K$ . La proposition 2.2.6 montre qu'aucun nombre premier différent de  $l$  ne divise  $c_1$ ; comme de plus  $l$  et  $\eta$  sont premiers entre eux,  $l$  ne divise pas  $c_1$  et donc  $c_1 = 1$ . L'entier quadratique  $\xi$  définit donc le corps tchébychévien  $T$ . D'autre part  $l^2$  divisant  $\beta d$  divise aussi  $bd$  puisque  $l$  ne divise pas  $c_1 c_2^l$ . Enfin,  $\xi$  définissant le corps tchébychévien  $T$ , il n'est pas une puissance  $l$ -ième dans  $K$  et le lemme 1.1.2 montre que  $P_l(X; M) - a$  n'a pas de racines rationnelles. L'élément  $\xi$  répond donc à notre question.

4.2. Rappelons le lemme suivant:

LEMME 4.2.1. *Soit  $L$  un corps quadratique et  $M$  une 3-extension abélienne non ramifiée de  $L$ , alors  $M$  est galoisienne sur  $\mathbf{Q}$ .*

*Démonstration.* Soit  $H$  le groupe de Galois de la 3-extension abélienne maximale non ramifiée de  $L$ . Cette extension maximale étant galoisienne sur  $\mathbf{Q}$ , le groupe  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  agit par conjugaison sur  $H$ . Soit  $H_1$  le sous-groupe de  $H$  formé des éléments invariant par  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  et  $H_2$  celui formé des éléments qui, par l'action de l'élément non trivial de  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$ , se transforment en leur inverse. Les sous-groupes  $H_1$  et  $H_2$  sont stables par  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  et leur produit direct est isomorphe à  $H$ . En conséquence, le corps des invariants  $M_2$  de  $H_2$  est galoisien sur  $\mathbf{Q}$  et  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  agit trivialement sur  $\text{Gal}(M_2/L)$ . Les ordres de  $\text{Gal}(M_2/L)$  et de  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  étant premier entre eux, le corps  $M_2$  est le composé de  $L$  et d'une 3-extension non ramifiée de  $\mathbf{Q}$ . Le corps  $\mathbf{Q}$  n'ayant pas d'extension non ramifiée, on a  $M_2 = L$  i.e  $H_2 = H$  et donc tous les sous-groupes de  $H$  sont stables par l'action de  $\text{Gal}(L/\mathbf{Q})$  ce qui implique l'assertion de notre lemme.

Il résulte de ce lemme que toute extension abélienne non ramifiée de degré 3 d'un corps quadratique (nécessairement différent de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ ) est la clôture galoisienne d'un corps tchébychévien: en effet, ce lemme montre qu'une telle extension est galoisienne sur  $\mathbf{Q}$ ; elle n'est pas abélienne sur  $\mathbf{Q}$  puisque  $\mathbf{Q}$  ne possède pas d'extension non ramifiée, c'est donc la clôture galoisienne d'un corps cubique non galoisien; ce corps n'est pas pur puisque le corps quadratique  $K$  contenu dans sa clôture galoisienne n'est pas le corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ , donc (remarque 1.1.6) c'est un corps tchébychévien. On peut maintenant donner une caractérisation des corps quadratiques dont le nombre de classes est divisible par 3; on a:

**THÉORÈME 4.2.2.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre de classes d'un corps quadratique soit divisible par 3 est que ce corps soit de la forme  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3(x^2-4z^3)})$  où  $x$  et  $z$  sont deux entiers rationnels non nuls, tels que les p.g.c.d.  $(z, 2l)$  et  $(x, z)$  sont égaux à 1, que  $x^2 - 4z^3$  est divisible par 27 et n'est pas un carré et que le polynôme  $X^3 - 3zX - n$  n'a pas de racines rationnelles.*

*Démonstration.* Soit  $L$  un corps quadratique. Le nombre de classe de  $L$  est divisible par 3 si et seulement si  $L$  possède des extensions abéliennes non ramifiées de degré 3. Comme on l'a remarqué ci-dessus, une telle extension est la clôture galoisienne d'un corps tchébychévien. Supposons donc que  $L$  possède une telle extension et notons  $T$  le corps tchébychévien dont elle est la clôture galoisienne. Désignons par  $d$  l'entier sans carré tel que  $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3d})$  ( $d$  existe puisque  $L \neq \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ ). Le théorème 4.1.1. affirme l'existence d'un entier  $\xi$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  dont la norme est le cube d'un rationnel impair  $M$ , qui définit  $T$  et qui vérifie les conditions 1), 2) et 3) de cette proposition. Ecrivons  $\xi = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{d})$  et posons  $x = a$  et  $z = M$ ; on vérifie facilement que  $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3(x^2 - 4z^3)})$  et que  $x$  et  $z$  vérifient toutes les conditions de notre proposition, Réciproquement, soient  $x$  et  $z$  vérifiant toutes les conditions de notre proposition; nous posons  $x^2 - 4z^3 = b^2d$  avec  $d$  sans carré. L'entier quadratique  $\xi = \frac{1}{2}(x + b\sqrt{d})$  vérifie les conditions 1), 2) et 3) du théorème 4.1.1 donc la clôture galoisienne du corps tchébychévien associé à  $\xi$  est une extension abélienne non ramifiée de degré 3 de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3d})$  i.e de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-3(x^2 - 4z^3)})$ ; le nombre de classe de ce corps quadratique est donc divisible par 3 ce qui achève la démonstration.

#### 4.3. Le cas $l > 3$

On rappelle que  $\omega$  est  $\cos \frac{2\pi}{l}$ . Le corps  $L$  est le corps  $\mathbf{Q}(\omega, \sqrt{d(\omega^2 - 1)})$ ; c'est une extension quadratique du sous-corps réel maximal du corps des racines  $l$ -ième de l'unité. On n'a pas dans ce cas de résultat aussi précis que celui du théorème 4.2.2, mais le théorème 4.1.1 permet de démontrer le résultat suivant: