1. Ein blick auf die klassische theorie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE [1]

von Heinz BAUER

Der Vortrag verfolgte das Ziel, an Hand einiger neuer Resultate der Potentialtheorie die zunehmend deutlicher werdende zentrale Rolle von Halbgruppen und Resolventen in dieser Theorie aufzuzeigen. Der Verfasser hofft, damit auch einen Beitrag zu einer Standortbestimmung der Potentialtheorie zu liefern.

1. Ein blick auf die klassische theorie

Klassische Potentialtheorie heißt einerseits (lokaler Aspekt) das Studium der *Laplaceschen Differentialgleichung*

(1) $$\Delta h = 0$$

im $\mathbf{R}^n$, wobei wir uns auf den Fall $n \geqslant 3$ beschränken, und andererseits (globaler Aspekt) das Studium der *Newtonschen Kernfunktion*

(2) $$N(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$ [2]

Aus ihr leiten sich die global definierten *Potentiale* p ab. Dies sind alle Funktionen $p : \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$, welche nicht konstant gleich $+\infty$ sind und eine (notwendigerweise eindeutige) Darstellung

(3) $$p = N * \mu$$

besitzen, wobei μ ein positives Radon-Maß auf $\mathbf{R}^n$ ist. Eine nicht-negative Funktion u: $\mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ heißt *hyperharmonisch* (auf $\mathbf{R}^n$), wenn sie von der Form

$$u = N * \mu + h$$

[1]) Ausarbeitung eines am 10. April 1978 an der ETH Zürich im Rahmen des International Symposium on Analysis gehaltenen Vortrages. Dieser Artikel wurde bereits in *Contributions to Analysis*, Monographie de l'*Ens. Math.* N° 27, Genève 1979, veröffentlicht.

[2]) $|x|$ bezeichnet die euklidische Norm des Vektors $x \in \mathbf{R}^n$.

ist, wobei jetzt μ ein beliebiges Radon-Maß $\geqslant 0$ auf $\mathbf{R}^n$ und h eine positive harmonische Funktion auf $\mathbf{R}^n$, also eine (in diesem Fall konstante) Lösung $h \geqslant 0$ von (1) ist. Diese hyperharmonischen Funktionen $u \geqslant 0$ können als nach unten halbstetige Funktionen durch die übliche Mittelwert-eigenschaft (Rieszscher Zerlegungssatz) oder durch die Gültigkeit von $\Delta u \leqslant 0$ im distributions-theoretischen Sinne gekennzeichnet werden.

Klassische Potentialtheorie muß aber auch unter dem Aspekt des Studiums der Brownschen Halbgruppe gesehen werden. Dieser (ebenfalls globale) Aspekt tritt historisch gesehen erst viel später in Erscheinung, nämlich durch die bahnbrechenden Arbeiten von Kakutani [21], [22]. Die *Brownsche Halbgruppe* (oder die Halbgruppe der Brownschen Bewegung) ist dabei die Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t>0}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße

(4) $$\nu_t = g_t \lambda^n,$$

wobei λ^n das n-dimensionale Lebesgue-Maß und g_t die Dichte

(5) $$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

ist. Wie üblich interpretieren wir ν_t als einen Kern, d.h. als den durch Faltung wirkenden Operator P_t:

$$P_t f = \nu_t * f.$$

Dieser operiert auf den beschränkten sowie auf den nicht-negativen Borel-meßbaren Funktionen linear und positiv. Somit erscheint die Faltungshalb-gruppe $(\nu_t)_{t>0}$ als eine Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen.

Bezüglich einer solchen Halbgruppe heißt eine nicht-negative Funktion u: $\mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ *exzessiv*, wenn sie Borel-meßbar ist und der Bedingung

(6) $$\sup_{t>0} P_t u = u$$

genügt. Die potentialtheoretische Bedeutung dieser Halbgruppe wird deutlich durch den fundamentalen Satz von Doob [15] und Hunt [20]:

1.1. *Die exzessiven Funktionen bezüglich der Brownschen Halbgruppe fallen mit den nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen zusammen.*

Der analytische Grund für diesen Zusammenhang ist die Gleichheit

(7) $$\int_0^\infty g_t(x)\,dt = c_n N(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

mit dem positiven Faktor

$$c_n = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Der sich durch Integration der Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ ergebende Kern

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt \tag{8}$$

ist somit nichts anderes als der durch Faltung mit Hilfe des Maßes

$$\kappa = c_n N \lambda^n \tag{9}$$

wirkende Kern $Vf = \kappa * f$.

Damit sind es die drei Objekte Δ, N und $(P_t)_{t>0}$, die im Mittelpunkt der klassischen Potentialtheorie stehen. Jedes dieser Objekte erlaubt die Definition der (global definierten) hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$. Aus der Kenntnis eines dieser Objekte folgt die der anderen, denn N ist die Fundamentallösung von (1), interpretiert als der zu κ gehörige Faltungskern V, berechnet sich N gemäß (8) aus $(P_t)_{t>0}$, ferner ist Δ der infinitesimale Erzeuger von $(P_t)_{t>0}$, d.h. es gilt

$$\Delta f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \tag{10}$$

für alle Funktionen $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ mit kompakten Träger. Hierzu vergleiche man Berg-Forst [7].

Der Satz 1.1 ist der Schlüssel zum wahrscheinlichkeitstheoretischen Verständnis potentialtheoretischer Begriffsbildungen. Hierauf soll aber hier nicht eingegangen werden. (Vgl. jedoch [2].)

2. Harmonische Räume und Fellersche Halbgruppen

Die weiteren Teile des Vortrages werden vor allem durch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen lokaler Potentialtheorie und Halbgruppen von Kernen motiviert.

Als lokale Potentialtheorie verstehen wir dabei die Theorie der harmonischen Räume, die sich aus der Idee entwickelt hat, die Theorie der Laplace-Gleichung (1) auf allgemeinere elliptische und parabolische Differentialgleichungen etwa mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Grundraum zu entwickeln. (Vgl. hierzu [1], Brelot [10], [11], [12] und Constantinescu-Cornea [13].)