

0. EINLEITUNG

Objektyp: **Preface**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BEISPIEL EINER PERIODISCHEN INSTABILEN HOLOMORPHEN STRÖMUNG

von Thomas MÜLLER

0. EINLEITUNG

A. Haefliger stellte die Frage, ob eine differenzierbare Blätterung auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit, bei welcher alle Blätter kompakt sind, stabil ist (eine Blätterung eines Raumes X induziert die folgende Äquivalenzrelation: Zwei Punkte, welche auf dem gleichen Blatt liegen, sind äquivalent zueinander. Ist der Quotient von X nach dieser Äquivalenzrelation hausdorffsch, so heisst die Blätterung stabil. Sind bei der Blätterung alle Blätter kompakt, so ist dies zur folgenden Bedingung äquivalent: Jedes Blatt besitzt ein Umgebungsfundamentalsystem aus saturierten Umgebungen. Eine saturierte Umgebung U soll definitionsgemäss zu jedem Punkt $x \in U$ das ganze Blatt $B(x)$ durch diesen Punkt enthalten). D. B. A. Epstein konnte in [4] zeigen, dass bei einer periodischen differenzierbaren Strömung auf einer 3-dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit alle Bahnen stabil sind. Der Satz konnte in [2] von R. Edwards, K. Millett und D. Sullivan und auch von E. Vogt in [10] auf 2-codimensionale differenzierbare Blätterungen verallgemeinert werden. Bald zeigte sich auch, dass eine Verallgemeinerung auf höhere Codimensionen nicht möglich ist. Denn zuerst fanden Sullivan und Thurston (siehe [9]) ein 4-codimensionales — und schliesslich Epstein und Vogt (siehe [3]) ein 3-codimensionales Gegenbeispiel zur Frage von Haefliger. Die Gegenbeispiele liessen sich sogar reellanalytisch konstruieren.

Für komplexe Räume schienen die Verhältnisse völlig anders. H. Holmann konnte in [5] den folgenden Satz beweisen:

Eine holomorphe Strömung (Operation der additiven Gruppe \mathbb{C} der komplexen Zahlen) auf dem kompakten komplexen Raum X , bei der alle Bahnen kompakt sind (eindimensionale komplexe Tori), ist stabil. Dieser Satz kann als Analogon zum Satz von Epstein angesehen werden, ohne jedoch Einschränkungen bezüglich der Codimension der Blätterung zu enthalten. Weiterhin konnte Holmann in [6] und B. Kaup in [7] zeigen,

dass eine 1-codimensionale kompakte holomorphe Blätterung eines komplexen Raumes X immer stabil ist. Insbesondere muss X also nicht kompakt sein. Beispiele von instabilen kompakten holomorphen Blätterungen waren selbst im Fall von nicht kompakten komplexen Räumen bisher unbekannt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine instabile periodische holomorphe Strömung auf einer nicht kompakten 3-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit konstruiert. Alle Bahnen sind eindimensionale Tori der Form

$$T : \mathbb{C} / G \text{ mit } G := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

Lässt man in diesem Beispiel jeweils die Imaginärteile weg, so erhält man die von Epstein in [4] beschriebene reelle instabile periodische Strömung auf einer nicht-kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

1. BESCHREIBUNG DES BEISPIELS

Die additive Gruppe $G := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ operiere wie folgt auf den beiden Räumen \mathbb{C}^3 und $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* := \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, z_3 \neq 0 \}$:

$$\Phi: G \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (g: z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_1, z_2 + g, z_3)$$

$$\Psi: G \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*, \quad (g: z_1, z_2, z_3) \rightarrow \left(z_1 + g, z_2 + \frac{g}{z_3}, z_3 \right)$$

Seien $g_1, g_2 \in G$. Dann bezeichnen Φ_{g_1} und Ψ_{g_2} die von g_1 bzw. g_2 durch Φ bzw. Ψ induzierten Automorphismen von \mathbb{C}^3 bzw. $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$. Auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ operiert die Automorphismengruppe $H := \{ \Phi_{g_1} \circ \Psi_{g_2}; g_1, g_2 \in G \}$ eigentlich diskontinuierlich und sogar frei. Der Quotient $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*)/H =: X_1$ ist somit eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei

$$F_2 := \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, 0 < \operatorname{Re}(z_1) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z_1) < 1 \},$$

$$F_0 := \{ (z_1, z_2, z_3) \in F_2, z_3 \neq 0 \}.$$

Die Automorphismengruppe $G_\Phi := \{ \Phi_g, g \in G \}$ operiert eigentlich diskontinuierlich und sogar frei auf F_2 und F_0 . Die Quotienten $F_2/G_\Phi =: X_2$ und $F_0/G_\Phi =: X_0$ sind somit komplexe Mannigfaltigkeiten. Wegen $\Psi_g(F_0) \cap F_0 = \emptyset$ für alle $g \neq 0$ kann $F_0/G_\Phi = X_0$ als offene Teilmenge von X_1 aufgefasst werden. X_0 ist offen in X_1 und in X_2 und gleich dem Durchschnitt $X_1 \cap X_2$.