

Objekttyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Application 4 (The spectral theorem for normal operators). Let \mathcal{H} be a Hilbert space and let $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denote the Banach algebra of all bounded linear operators on \mathcal{H} . Consider a subalgebra $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ with the following properties:

- (i) A is commutative;
- (ii) A is closed;
- (iii) If $T \in A$ then $T^* \in A$;
- (iv) The identity operator belongs to A .

Let Δ denote the maximal ideal space of A . Since each $T \in A$ is normal it follows that $\|T\| = \|\hat{T}\|_\infty$ for every $T \in A$.

For each pair of vectors $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ define a mapping $L_{\xi, \eta} : A \rightarrow \mathbb{C}$ by

$$L_{\xi, \eta}(T) = (T\xi, \eta)$$

then we have

$$|L_{\xi, \eta}(T)| \leq \|T\| \cdot \|\xi\| \|\eta\| = \|\xi\| \|\eta\| \cdot \|\hat{T}\|_\infty$$

Therefore by Theorem 1 there exists a bounded complex Radon measure $\mu_{\xi, \eta}$ on Δ such that $\|\mu_{\xi, \eta}\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ and

$$L_{\xi, \eta}(T) = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{\xi, \eta} \quad \text{for every } T \in A.$$

An application of the Gelfand-Neumark theorem establishes the uniqueness of the measure. The usual construction of a unique resolution of the identity on the Borel sets of Δ can be made based on this formula. A specialization of this formula to a single normal operator leads to the classical spectral theorem. We shall not give the details here since many excellent accounts exist (c.f. Berberian [1], [2], Segal-Kunze [18]). An especially lucid presentation is given in Rudin [16].

BIBLIOGRAPHY

- [1] BERBERIAN, S. *Notes on spectral theory*. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
- [2] ——— *Lectures in functional analysis and operator theory*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

- [3] BERG, C., J. R. C. CHRISTENSEN and P. RESSEL. Positive definite functions on abelian semigroups. *Math. Ann.* 223 (1976), pp. 253-272.
- [4] BUCY, R. S. and G. MALTESE. A representation theorem for positive functionals on involution algebras. *Math. Ann.* 162 (1966), pp. 364-367.
- [5] ——— Extreme positive definite functions and Choquet's representation theorem. *Jour. Math. Ann. Appl.* 12 (1965), pp. 371-377.
- [6] CHOQUET, G. *Lectures on analysis, vol. II.* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [7] ——— Deux exemples classiques de représentation intégrale. *Enseign. Math.* 15 (1969), pp. 63-75.
- [8] DIXMIER, J. *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [9] EBERLEIN, W. Characterizations of Fourier-Stieltjes transforms. *Duke Jour. Math.* 22 (1955), pp. 465-468.
- [10] GELFAND, I., D. RAIKOV and G. SILOV. *Commutative normed rings.* Chelsea, New York 1964.
- [11] LOOMIS, L. *Abstract harmonic analysis.* Van Nostrand, New York, 1953.
- [12] MALTESE, G. Multiplicative extensions of multiplicative functionals in Banach algebras. *Arch. Math. (Basel)* 21 (1970), pp. 502-505.
- [13] ——— Convexity methods and the Choquet boundary in Banach algebras. *Bolletino Union Math. Ital. (5)* 15-A (1978), pp. 131-136.
- [14] PHELPS, R. R. *Lectures on Choquet's theorem.* Van Nostrand, New York, 1966.
- [15] RUDIN, W. *Fourier analysis on groups.* Interscience, New York, 1962.
- [16] ——— *Functional analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.
- [17] SCHOENBERG, I. A remark on the preceding note by Bochner. *Bull. AMS* 40 (1934), pp. 277-278.
- [18] SEGAL, I. E. and R. KUNZE. *Integrals and operators.* McGraw-Hill, New York, 1968.

(Reçu le 15 février 1979)

George Maltese
Universität Münster
Münster, Germany