1. Les corps modérément ramifiés

Chapitre 4. — Exemples numériques

Dans ce chapitre, m est le produit de $r \geqslant 1$ nombres premiers distincts et congrus à 1 modulo 3.

Note. En plus des critères obtenus aux chapitres 2 et 3, on utilise, pour étoffer la liste des résultats, un critère donné par Payan dans [6] (proposition 1).

Soit $m = p_1 p_2 \ldots p_r$ la décomposition de m en facteurs premiers. On sait que si K/Q est modérément ramifiée de discriminant m^2 (resp. sauvagement ramifiée de discriminant $81\, m^2$), K est le corps de rupture de $X^3 - 3\,m\,X - a\,m$, avec $4\,m = a^2 + 27\,b^2$ et $a \equiv 1 \pmod 3$ (resp. avec $4\,m = a^2 + 3\,b^2$, $a \equiv 1 \pmod 3$ et $b \not\equiv 0 \pmod 3$). Le critère s'énonce alors ainsi:

Pour que O_K soit monogène, il faut $a^{\frac{p_i - 1}{3}} \equiv 1 \pmod{p_i}$ pour $i = 2, 3, \ldots r$ si K/Q est modérément ramifiée et $(3a)^{\frac{p_i - 1}{3}} \equiv 1 \pmod{p_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots r$ si K/Q est sauvagement ramifiée.

1. Les corps modérément ramifiés

Parmi les 4 entiers canoniques unitaires équivalents engendrant un corps modérément ramifié, on choisit l'entier canonique unitaire positif $\alpha = a_1 j + a_2 j^2$ (donc avec $a_1 \equiv a_2 \equiv -1 \pmod 3$) tel que $|a_1| > |a_2|$. On associe ainsi à chaque corps modérément ramifié un entier canonique unique α et réciproquement.

Si $\alpha = (a+1)\,j - a\,j^2$ (avec $a \equiv 1 \pmod 3$), on a $m = 3\,a^2 + 3\,a + 1$, et l'équation (3.10) admet, pour cette valeur de m, la solution $X = 9\,a + 3$ et $Y = 3$, X étant congru à 12 (mod 27). Le nombre θ, construit avec $(\beta, 0)$, où $\beta = (3a+2)\,j + (3a+1)\,j^2$, engendre un corps dont l'anneau des entiers est $Z[\theta]$ (théorème 3.4).

Comme $\dfrac{\beta'^2\beta}{\alpha^2\alpha'} = (j^2 - j)^3$, α engendre aussi le corps $Q(\theta)$. On dit, dans ce cas, que O_K est presque trivialement monogène. Le polynôme irréductible de θ est $X^3 - mX + \dfrac{m}{3}(2a+1)$.

Remarque 4.1 Si O_K est trivialement (resp. presque trivialement) monogène (définition 3.1), on a $4m = a^2 + 27$ (resp. $4m = 1+27b^2$) et inversement. Ces cas sont signalés dans [6].

Pour chaque nombre $m < 2000$, on a calculé les entiers canoniques associés aux 2^{r-1} corps modérément ramifiés de discriminants m^2 (cf. corollaire 1.5).

Si pour un nombre m, l'un de ces entiers canoniques ne satisfait pas l'une des conditions permettant de dire que l'anneau des entiers du corps qu'il engendre admet 2 comme diviseur commun des indices (propriété 2.2), ou qu'il est trivialement ou presque trivialement monogène, on a cherché les solutions (X, Y) de l'équation (3.10), avec $X > 0$ et $0 < Y < 300\,000$ pour $m < 853$ et $0 < Y < 30000$ pour $853 < m < 2000$. Pour chaque solution obtenue, on a calculé le polynôme irréductible du nombre φ construit avec (β, S), où $\beta = \dfrac{X+3}{Y} j + \dfrac{X}{Y} j^2$ et où $S = \pm 1$ et $S \equiv -XY \pmod 3$ si $X \not\equiv 0 \pmod 3$ et où $S = 0$ si $X \equiv 0 \pmod 3$; φ est donc un générateur de l'anneau des entiers de $Q(\varphi)$. On a, ensuite, cherché le générateur canonique α du corps $Q(\varphi)$.

Les résultats sont les suivants:

m	X	Y	Irr (φ)	α
241	286	7	$X^3+X^2-562X+4945$	$-16j-j^2$
373	1598	19	$X^3-X^2-2362X+44981$	$17j-4j^2$
379	911	13	$X^3-X^2-1642X+26165$	$-22j-7j^2$
463	397	7	$X^3+X^2-1080X+13307$	$-22j-j^2$
751	1283	13	$X^3-X^2-3254X+72541$	$-31j-10j^2$
1159	629	7	$X^3-X^2-2704X+55031$	$35j+2j^2$
1213	7837	37	$X^3+X^2-14960X+699317$	$-28j+11j^2$
1321	506370	579	$X^3-254953X+49549389$	$-40j-31j^2$
1381	12745	49	$X^3+X^2-22556X+1296401$	$35j-4j^2$
1603	740	7	$X^3-X^2-3740X+89293$	$41j+2j^2$

Si m est un nombre premier, il n'y a qu'un corps de discriminant m^2 et α est défini par m. C'est le cas pour tous les nombres m de ce tableau sauf pour $1159 = 19 \cdot 61$ et $1603 = 7 \cdot 229$.

Les 2 corps de discriminants 1159^2 sont engendrés respectivement par $-37j - 7j^2$ et $35j + 2j^2$. Le corps engendré par $-37j - 7j^2$ ayant 2 comme diviseur commun des indices, c'est le corps engendré par $35j + 2j^2$ dont l'anneau des entiers est monogène, de générateur φ.

Les 2 corps de discriminants 1603^2 sont engendrés respectivement par $\alpha = 41\,j + 2\,j^2$ et $-46\,j - 19\,j^2$. Or φ est construit avec $\beta = \frac{743}{7}j + \frac{740}{7}j^2$ et on a $\frac{\beta^2\beta'}{\alpha^2\alpha'} = (-2j-3j^2)^3$; c'est donc le corps engendré par α dont l'anneau des entiers est monogène de générateur φ (théorème 1.2).

On donne dans le tableau suivant, pour chaque corps de discriminant $< 1000^2$, la racine carrée du discriminant, les valeurs a_1 et a_2 ($a_1 j + a_2 j^2$ étant l'entier canonique qui engendre le corps) et, si possible, la nature de son anneau des entiers: triv. mon. signifie que l'anneau est trivialement monogène, p. tr. mon. qu'il est presque trivialement monogène, 2 d. c. i. que 2 est diviseur commun des indices (l'anneau n'est donc pas monogène) et, si pour d'autres corps, le critère de Payan (cf. note en début de chapitre) permet d'affirmer que l'anneau n'est pas monogène, on donne la valeur de a correspondante ($4m = a^2 + 27b^2$). La correspondance entre $\alpha = a_1 j + a_2 j^2$ et a se fait en comparant le polynôme du nombre construit avec $(3\alpha, 0)$ (formule 1.4) et le polynôme $X^3 - 3mX - am$.

Pour 34 des 128 corps de ce tableau, les méthodes utilisées n'ont pas permis de déterminer la nature de l'anneau, si ce n'est que cet anneau n'est ni trivialement ni presque trivialement monogène et que 2 n'est pas d. c. i.

m	a_1, a_2	Anneau	m	a_1, a_2	Anneau
7	2, −1	triv. mon.	157	−13, −1	2 d. c. i.
13	−4, −1	triv. mon.	163	14, 11	triv. mon.
19	5, 2	triv. mon.	181	11, −4	?
31	5, −1	2 d. c. i.	193	−16, −7	?
37	−7, −4	triv. mon.	199	−13, 2	?
43	−7, −1	2 d. c. i.	211	14, −1	?
61	5, −4	p. tr. mon.	217=7·31	−16, −13	triv. mon.
67	−7, 2	?	217	17, 8	$a=25$
73	8, −1	?	223	17, 11	2 d. c. i.
79	−10, −7	triv. mon.	229	17, 5	2 d. c. i.
91=7·13	11, 5	2 d. c. i.	241	−16, −1	monogène
91	−10, −1	$a=-11$	247=13·19	17, 14	triv. mon.
97	11, 8	triv. mon.	247	11, −7	2 d. c. i.
103	11, 2	?	259=7·37	−13, 5	2 d. c. i.
109	−7, 5	2 d. c. i.	259	17, 2	$a=19$
127	−13, −7	2 d. c. i.	271	−19, −10	?
133=7·19	11, −1	2 d. c. i.	277	−19, −7	2 d. c. i.
133	−13, −4	$a=-17$	283	−19, −13	2 d. c. i.
139	−13, −10	triv. mon.	301=7·43	20, 11	$a=31$
151	14, 5	?	301	−19, −4	$a=-23$

m	a_1, a_2	Anneau	m	a_1, a_2	Anneau
307	17, −1	2 d. c. i.	661	29, 20	?
313	−19, −16	triv. mon.	673	29, 8	?
331	11, −10	p. tr. mon.	679 = 7·97	17, −13	2 d. c. i.
337	−13, 8	?	679	−25, 2	$a = -23$
349	20, 17	triv. mon.	691	−19, 11	2 d. c. i.
367	−22, −13	?	703 = 19·37	29, 23	2 d. c. i.
373	17, −4	monogène	703	26, −1	$a = 25$
379	−22, −7	monogène	709	−28, −25	triv. mon.
397	23, 11	2 d. c. i.	721 = 7·103	29, 5	2 d. c. i.
403 = 13·31	23, 14	$a = 37$	721	−31, −16	$a = -47$
403	−19, 2	$a = -17$	727	−31, −13	2 d. c. i.
409	23, 8	?	733	−31, −19	2 d. c. i.
421	20, −1	?	739	23, −7	2 d. c. i.
427 = 7·61	−22, −19	triv. mon.	751	−31, −10	monogène
427	23, 17	2 d. c. i.	757	−28, −1	?
433	−13, 11	2 d. c. i.	763 = 7·109	29, 26	triv. mon.
439	23, 5	2 d. c. i.	763	−31, −22	$a = -53$
457	17, −7	2 d. c. i.	769	32, 17	?
463	−22, −1	monogène	787	29, 2	?
469 = 7·67	23, 20	triv. mon.	793 = 13·61	−31, −7	2 d. c. i.
469	−25, −13	2 d. c. i.	793	32, 11	$a = 43$
481 = 13·37	−25, −16	$a = -41$	811	−31, −25	2 d. c. i.
481 = 13·37	−19, 5	2 d. c. i.	817 = 19·43	17, −16	p. tr. mon.
487	23, 2	?	817	32, 23	$a = 55$
499	−25, −7	2 d. c. i.	823	−19, 14	?
511 = 7·73	26, 11	$a = 37$	829	20, −13	?
511	−25, −19	2 d. c. i.	853	−31, −4	?
523	26, 17	?	859	23, −10	?
541	−25, −4	?	871 = 13·67	29, −1	2 d. c. i.
547	14, −13	p. tr. mon.	871	−34, −19	?
553 = 7·79	23, −1	2 d. c. i.	877	−31, −28	triv. mon.
553	−16, 11	$a = -5$	883	−34, −13	?
559 = 13·43	−25, −22	triv. mon.	889 = 7·127	32, 5	$a = 37$
559	17, −10	$a = 7$	889	−25, 8	$a = -17$
571	26, 5	?	907	26, −7	?
577	−19, 8	?	919	35, 17	2 d. c. i.
589 = 19·31	20, −7	$a = 13$	937	32, 29	triv. mon.
589	−28, −13	$a = -41$	949 = 13·73	−28, 5	$a = -23$
601	−25, −1	2 d. c. i.	949	35, 23	2 d. c. i.
607	26, 23	triv. mon.	967	−34, −7	?
613	−28, −19	?	973 = 7·139	29, −4	$a = 25$
619	−22, 5	?	973	−19, 17	2 d. c. i.
631	29, 14	?	991	35, 26	?
643	29, 11	2 d. c. i.	997	23, −13	2 d. c. i.