§4. — Remarques diverses

phisme $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \to \hat{K}/K$. A noter aussi que, d'après la première assertion, on a dim ker $(D, \mathcal{O}^m) \geqslant h_1 + \ldots + h_m - m$ (théorème de Perron pour les systèmes).

§ 4. — Remarques diverses

a) *Equations dépendant d'un paramètre*

La théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre présente de nombreuses difficultés. Nous donnerons seulement ici un énoncé simple, qui « relativise » la proposition 1.1, et cela sans chercher les hypothèses minimum nécessaires. Soit Z une variété analytique complexe connexe, et soit D l'opérateur différentiel « dépendant du paramètre $z \in Z$ »: $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{d x^p}$, $a_p \in \mathcal{H}(\Delta \times Z)$, Δ le disque unité ouvert; supposons $a_m \neq 0$; soit $V \subset \Delta \times Z$ l'ensemble des zéros de a_m, et supposons que la projection $V \to Z$ induite par la projection naturelle $\pi : \Delta \times Z \to Z$ soit propre. Soit $\mathcal{K}$ le complexe $0 \to \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \to \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \to 0$, avec $\mathcal{H}_{\Delta \times Z}$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Delta \times Z$.

Proposition 4.1. Le complexe $\pi_* \mathcal{K}$ est à cohomologie $\mathcal{H}_Z$-cohérente.

Autrement dit, les faisceaux associés aux préfaisceaux $U \to \ker\big(D, \mathcal{H}(\Delta \times U)\big)$ et $U \to \operatorname{coker}\big(D, \mathcal{H}(\Delta \times U)\big)$, U ouvert de Z, sont $\mathcal{H}_Z$-cohérents. Esquissons la démonstration: on peut, en restreignant Z, supposer que V est contenu dans $\Delta_r \times Z$, avec $0 < r < 1$, Δ_r le disque fermé de rayon r; prenons r' vérifiant $r < r' < 1$. On démontre facilement, à l'aide du théorème d'existence, d'unicité, et de dépendance d'un paramètre pour les équations différentielles que le préfaisceau associé au faisceau $U \to \big(\ker D, \mathcal{H}(\Delta \times U)\big)$ $\big[$resp. $U \mapsto \big(\operatorname{coker} D, \mathcal{H}(\Delta \times U)\big)\big]$ est isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) du morphisme de faisceaux $\mathcal{H}_Z\big(B^m(\Delta_{r'})\big) \xrightarrow{D} \mathcal{H}_Z\big(B^0(\Delta_{r'})\big)$, ici, E étant un Banach, on note $\mathcal{H}_Z(E)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Z à valeurs dans E. Nous sommes alors ramenés à la situation classique de perturbation analytique d'un opérateur à indice dans des espaces de Banach; d'où le résultat.

On a aussi des énoncés analogues avec par exemple Z espace analytique ou espace topologique séparé, ou variété différentielle (dans ces deux derniers cas, il faudrait remplacer l'énoncé, comme d'habitude en géométrie analytique relative, par un énoncé de pseudo-cohérence pour

$R\pi_*(\mathscr{K})$; voir divers articles consacrés aux images directes en géométrie analytique: Kiehl, ou Forster-Knorr, à paraître aux Inventiones, ou la thèse de Houzel à paraître quelque part; nous n'entrerons pas dans les détails).

b) *Equations non-linéaires*

Soit Φ une fonction holomorphe sur $\Delta \times U$, Δ le disque unité ouvert, U un ouvert de $\mathbf{C}^{m+1}$; une solution de l'équation (E): $\Phi(x, f, f', \ldots, f^{(m)}) = 0$ dans Δ est une fonction f holomorphe sur Δ, telle que l'application $x \to (f(x), \ldots, f^{(m)}(x))$ soit à valeurs dans U, et telle qu'on ait identiquement $\Phi(x, f(x), \ldots, f^{(m)}(x)) = 0$. Nous nous proposons d'examiner très rapidement des questions du type suivant: dans quelle mesure peut-on « paramétrer naturellement » les solutions de (E) par les points d'un espace analytique (la notion de « paramétrage naturel » se définit ici, comme d'habitude dans ce genre de problèmes, par la représentabilité d'un foncteur facile à définir; nous laisserons le lecteur expliciter).

Nous examinerons seulement la possibilité de « paramétrer » les solutions voisines d'une solution f_0 donnée; par définition, les points singuliers (E) en f_0 sont les points singuliers de l'équation linéarisée en f_0, i.e. les points x vérifiant $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x, f_0(x), \ldots, f_0^{(m)}(x)) = 0$. Nous supposerons que f_0 n'est pas une « intégrale singulière », c'est-à-dire qu'il existe des points non singuliers.

Soit d'abord r, avec $0 < r < 1$, tel que le cercle $\{ |x| = r \}$ ne contienne pas de points singuliers. L'application qui à f fait correspondre $\Phi(x, f, \ldots, f^{(m)})$, qu'on notera $f \to \Psi(f)$ est alors une application analytique définie sur un voisinage de f_0 dans $B^m(\Delta_r)$, à valeurs dans $B^0(\Delta_r)$; comme l'application $\dfrac{\partial \Psi}{\partial f}(f_0)$ est à indice, d'après une variante de la proposition 1.1, des raisonnements connus montrent que l'espace analytique banachique $\Psi^{-1}(0)$ est, au voisinage de f_0, de dimension finie (cf. Douady [1]); cela paramètre l'ensemble des solutions de (E) dans $B^m(\Delta_r)$, voisines de f_0. Il est facile aussi de voir que la dimension f_0 du germe de cet ensemble est comprise entre m et l'indice de l'équation linéarisée

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f}(f_0) : B^m(\Delta_r) \to B^0(\Delta_r)$$

et que ce dernier indice est égal à $m - v$, v le nombre des zéros dans Δ_r de $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x, f_0, \dots, f_0^{(m)})$.

Soit maintenant r quelconque, avec $0 \leqslant r < 1$. Pour $r' > r$, assez voisin de r, le cercle $|x| = r'$ ne contiendra pas de points singuliers de (E) en f_0. On pourra alors faire la construction précédente, et obtenir un germe d'espace analytique; pour tous les r' assez voisins de r, ces germes coïncident, en vertu du résultat suivant; il existe $r_0 > r$ possédant la propriété suivante: pour tout r', avec $r < r' < r_0$, on peut trouver $\varepsilon(r') > 0$ tel que toute f solution de (E) dans $\mathring{\Delta}_{r'}$, et vérifiant $\sup\limits_{|x| \leq r'} |f(x) - f_0(x)| \leqslant \varepsilon(r')$ se prolonge en une solution de (E) dans $\mathring{\Delta}_{r_0}$ (Cela se déduit facilement des résultats sur la « dépendance des conditions initiales ». dans le théorème d'existence et d'unicité). Cela nous définit un germe d'espace analytique paramétrant les solutions voisines de f_0 dans $\mathscr{H}(\Delta_r)$; en particulier, cela vaut pour $r = 0$, i.e. pour les solutions voisines de f_0 dans $\mathcal{O}$.

Il faut noter cependant que le résultat précédent n'est guère satisfaisant, d'une part, les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ont en général des domaines d'existences variables, et non univalents, ce qui rend le problème considéré un peu artificiel. D'autre part, le germe qui vient d'être construit, est bien universel en f_0; mais il peut ne pas être universel aux points voisins, à cause de l'existence des singularités mobiles (par contre, s'il n'y a que des singularité fixes, on peut voir que ce canular ne se produit pas).

§ 5. — Irrégularité d'un système différentiel formel

Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(\hat{K}^m)$, $k \in \mathbf{Z}$ on va définir l'irrégularité de D par une adaptation des calculs des § 1-3. Tout d'abord on se ramène à $k = 0$ en posant pour $l \in \mathbf{Z}$: $i(x^l D) = i(D)$. *Dans toute la suite du paragraphe, on supposera donc* $k = 0$.

Rappelons qu'on appelle *réseau* dans $\hat{K}^m$ un sous $\hat{\mathcal{O}}$-module E de type fini tel qu'on ait $E \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \hat{K} = \hat{K}^m$; il est connu qu'un tel E est libre sur $\hat{\mathcal{O}}$, donc est de la forme $A\,\hat{\mathcal{O}}^m$, avec $A \in \mathrm{Gl}(m, \hat{K})$ et réciproquement. Si l'on