

# §5. — Riemann

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

la topologie. Il attribue, à chaque constituant, un nombre, son ordre de cyclodicité, à qui il reconnaît la nature d'un invariant topologique. C'est là une nouveauté de taille. On doit toutefois préciser que Listing est passé à côté du problème fondamental de la topologie des surfaces. En outre, bien qu'il ait le premier mentionné dans ses écrits cette surface que l'on appelle le ruban de Möbius, il n'a pas conçu, même en principe, une théorie topologique des surfaces non orientables.

### § 5. — RIEMANN

A. 1851 marque un tournant dans notre histoire. C'est au cours de cette année que Riemann, âgé de 25 ans, écrit ses *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* (Dissertation inaugurale); à cette occasion, Riemann est conduit à utiliser des notions qui ressortissent, à l'*analysis situs*. Cet événement est doublement important. D'abord, parce que, dès maintenant la topologie cesse d'être un simple jeu de l'esprit pour devenir un auxiliaire précieux dans cette théorie des fonctions, à laquelle le XIX<sup>e</sup> siècle finissant consacra le meilleur de ses forces. Ensuite, parce que dorénavant les problèmes topologiques vont être attaqués sur deux fronts; celui de la géométrie et celui de l'analyse.

Voyons pourquoi Riemann a besoin de topologie, et ce que la topologie lui doit.

1. Etudiant l'expression  $\int_c f(z) dz$ , où  $f$  est une fonction holomorphe sur un domaine et  $c$  une courbe fermée, il montre qu'elle est nulle, pourvu que  $c$  soit contour total d'une portion de surface. Lorsque  $c$  ne remplit pas cette condition, le théorème conserve sa valeur grâce à l'introduction d'une ligne nouvelle — la section transverse — qui joint deux points situés sur chacune des frontières. En pratique, cette situation se présente quand la fonction possède une singularité, que l'on exclut à l'aide d'une courbe fermée. Ainsi apparaît en théorie des fonctions une classification des surfaces: surfaces simplement connexes celles qui ne nécessitent aucune section transverse, doublement connexes celles qui demandent une section, etc.

2. Confronté au difficile problème posé par les fonctions multiformes, Riemann eut l'idée d'attacher à chacune d'elles une surface qu'on appelle aujourd'hui la surface de Riemann de la fonction. Aux propriétés topologiques de la surface de Riemann correspondent pour les fonctions des

propriétés intéressantes. L'étude topologique des surfaces s'impose donc, lorsqu'on aborde la question de ce point de vue. On a trouvé dans les papiers de Riemann une ébauche non datée, intitulée *Fragment sur l'analysis situs*. On y voit Riemann tenter d'étendre au cas de  $n$  dimensions, les considérations topologiques développées pour les surfaces.

B. A la suite de Riemann, on doit encore citer :

*Carl Neumann* : il reprit les difficiles écrits de Riemann, les approfondit, les éclaira et les publia (1865) dans un ouvrage justement célèbre dans lequel toute une génération de mathématiciens s'est familiarisée avec les théories du maître de Göttingen et les idées topologiques du temps. C'est, à tout prendre, le premier manuel de topologie.

*Enrico Betti* : le mathématicien de Pise fut à l'époque le meilleur connaisseur des idées de Riemann. Depuis 1860, Riemann souffre de tuberculose, mal qui l'emporta d'ailleurs en 1866. Ses médecins lui conseillent le climat du sud. Riemann se rend en Italie où il se lie d'amitié avec Betti à qui il fait part de ses idées. Ce sont ces idées, concernant notamment des invariants topologiques pour les variétés à  $n$  dimensions que l'on appelle aujourd'hui les nombres de Betti, qui servent de base, pour ne pas dire plus, à un célèbre mémoire que Betti publie en 1871.

*Félix Klein* : suivi par plusieurs élèves, dont le plus connu est W. Dyck, Félix Klein va exploiter le filon découvert par Riemann et par contrecoup développer l'*analysis situs*.

## § 6. — MÖBIUS

Avec August Ferdinand Möbius, on revient à la géométrie. Möbius est né à Schulpforta en 1790; il étudie sous Gauss entre 1813 et 1814. Dès 1815, il enseigne à Leipzig jusqu'à sa mort en 1868. On lui doit d'importantes contributions en géométrie, en mécanique céleste et en statique.

Le fil d'Ariane des travaux topologiques de Möbius apparaît dans un livre — son œuvre principale — *Der barycentrische Calcul* publié en 1827. Ce fil d'Ariane est le concept de Verwandtschaft qu'on traduisait en ce temps par corrélation — on dit aujourd'hui transformation — que Möbius envisage d'abord dans des cas ordinaires (isométrie, similitude, affinité, colinéation); en 1855, il consacre un long mémoire à une corrélation qu'il nomme Kreisverwandtschaft, c'est-à-dire à cette corrélation qui transforme