1. Quelques rappels historiques

Extrait de *L'Enseignement mathématique*, T. XX, fasc. 3-4, 1974

PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

par Pierre GABRIEL

1. QUELQUES RAPPELS HISTORIQUES

La notion d'anneau et de module s'est dégagée au cours de la deuxième moitié du 19e siècle et c'est alors qu'ont été publiés les premiers énoncés de classification. De tous ces énoncés, qui étaient intimement liés à des problèmes géométriques ou matriciels, nous ne voulons retenir ici que les deux suivants:

Le théorème de Jordan classifie les matrices complexes à similitude près ou, si l'on veut, les modules de $\mathbf{C}$-dimension finie sur l'algèbre des polynomes $\mathbf{C}[T]$. En fait, le « noyau » de la démonstration consiste en une classification des matrices nilpotentes, c'est-à-dire des modules de dimension finie sur les algèbres $\mathbf{C}[T]/(T^n)$.

Un problème de classification un peu plus général a été proposé par Weierstrass et finalement résolu par Kronecker vers 1900: deux couples de matrices complexes (A, B) et (A', B') de même type $m \times n$ sont dits équivalents s'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A' = PAQ$ et $B' = PBQ$. Kronecker a déterminé les classes d'équivalence de tels couples. Comme on le voit assez facilement, son problème se ramène à la classification des modules de $\mathbf{C}$-dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$: associer au couple (A, B) le module d'espace sous-jacent $k^n \oplus k^m$ tel que $X(u, v) = (0, Au)$ et $Y(u, v) = (0, Bu)$. Nous donnons plus loin la liste des classes d'isomorphisme de tels modules.

Aux résultats expérimentaux de la fin du 19e siècle a succédé de 1920 à 1950 une vague de « théories ». C'est alors qu'à été dégagée la notion d'anneau artinien et qu'ont été démontrés les premiers énoncés généraux non triviaux: l'anneau des endomorphismes d'un module indécomposable est local (Fitting), la décomposition d'un module de longueur finie en somme directe d'indécomposables est unique « à isomorphisme près » (Krull-Remak-Schmidt)... La fin de cette vague de théoriciens est marquée par la formulation des conjectures de Brauer-Thrall, dont il sera de nouveau question plus loin.

Le processus (dialectique !) d'alternance de périodes expérimentales et théoriques se poursuit avec quelques interruptions, car la question ne passionne vraiment les mathématiciens que par intermittence. En 1968 Gelfand et Ponomarev classifient les modules de dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X Y)$. S'appuyant sur des résultats de Dade, Kupisch et Janusz construisent en 1969 les représentations modulaires indécomposables des groupes finis à sous-groupes de Sylow cycliques... En 1974 enfin, Nazarova et Roiter publient une démonstration de la conjecture de Brauer-Thrall fondée sur une quantité appréciable de résultats de nature expérimentale obtenus auparavant. Ce sont ces résultats expérimentaux que nous voulons aborder ici.

2. Modules de dimension finie sur $k[X, Y]/(X^m, X Y, Y^n)$.

Nous désignons par k un corps commutatif, et nous nous intéressons en fait aux modules de k-dimension finie sur l'anneau $k[[X, Y]]/(X Y)$. Un tel module consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie M et de deux endomorphismes x, y tels que $xy = yx = 0$ et $x^m = y^n = 0$ pour m et n assez grands.

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[r, "x"] & e_1 \arrow[r, "x"] & e_2 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_3 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_4 \arrow[r, "x"] & e_5 \arrow[r, "x"] & e_6 \arrow[r, "x"] & e_7 \arrow[d, "y"] \\
& & & & & e_8
\end{tikzcd}$$

On peut associer à toute suite $n_1, n_2, \ldots, n_r$ d'entiers naturels $\geqslant 1$ un module dit de *première espèce* et d'espace sous-jacent $k^{1+n_1+\cdots+n_r}$. Nous explicitons les endomorphismes pour l'exemple de la suite 2, 2, 3, 1. Si $e_0, e_1, \ldots, e_8$ est la base naturelle de $k^{1+2+2+3+1}$, x envoie e_0 sur e_1, e_1 sur e_2, e_2 sur 0, e_3 sur 0, e_4 sur $e_5, \ldots, e_7$ sur 0, e_8 sur 0, tandis que y envoie e_0 sur 0, e_1 sur 0, e_2 sur e_3, e_3 sur e_4, e_4 sur $0, \ldots, e_7$ sur e_8 et e_8 sur 0 (se reporter à la figure ci-dessus). Les modules ainsi obtenus sont tous *indécomposables*, c'est-à-dire qu'ils ne s'écrivent pas comme somme directe de sous-modules non nuls.