3. Variétés de dimension 1 simplement connexes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

2.1 *Proposition. Pour que l'espace total E soit séparé il faut et il suffit que pour tout* $y \in \mathbf{R}$ *on ait* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$ (*ou* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = +\infty$).

2.2 *Exemple.* Si $g : U \to G$ est l'application associant à $x \in]-\infty, 0[$ la translation $g_x : y \to y + \frac{1}{x}$, l'espace total E du fibré $\eta : E \xrightarrow{p} Z$ correspondant à g est séparé.

On peut aussi vérifier que si $\eta' : E' \xrightarrow{p'} Z$ est le fibré correspondant à l'application $g^{-1} \left(g_x^{-1} : y \to y - \frac{1}{x} \right)$ alors:

(i) η et η' sont équivalents pour le groupe G;

(ii) η et η' ne sont pas équivalents pour le groupe G^+ des homéomorphismes croissants de $\mathbf{R}$;

(iii) η et η' sont isomorphes pour le groupe G^+.

2.3 THÉORÈME [1]. *Soient* η *et* η' *deux fibrés en droites sur* Z *correspondant à deux applications* g *et* g' *de* U *dans le groupe* G^+ *et ayant des espaces totaux séparés. Pour que* η *et* η' *soient équivalents pour le groupe* G^+ *il faut et il suffit que pour tout* $y \in \mathbf{R}$ *on ait* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = \lim_{x \to 0} g'_x(y)$.

Par conséquent les fibrés en droites localement triviaux sur le branchement simple, ayant un espace total séparé, se répartissent en

2 classes d'équivalence pour le groupe G^+;

1 classe d'isomorphie pour le groupe G^+;

1 classe d'équivalence pour le groupe G.

3. VARIÉTÉS DE DIMENSION 1 SIMPLEMENT CONNEXES

On désigne maintenant par X une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe.

3.1 *Proposition. Il existe sur* X *un ordre localement isomorphe à l'ordre de la droite réelle* $\mathbf{R}$.

En effet [2] la variété X s'étale sur $\mathbf{R}$.

Deux tels ordres sur X sont alors égaux ou opposés. Lorsqu'on a fait choix d'un de ces deux ordres on dit que la variété X est *ordonnée.*

3.2 *Exemple.* Dans le cas du branchement simple Z l'identification de l'ouvert U à l'intervalle $]-\infty, 0[$ détermine le choix de l'ordre sur Z.

3.3 *Proposition. Soit Y une seconde variété ordonnée, et soit h une application bijective de X sur Y. Pour que h soit un homéomorphisme il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.*

En particulier on peut répartir les homéomorphismes de X (indépendamment du choix de l'ordre) en deux classes: les homéomorphismes croissants et les homéomorphismes décroissants (cette dernière classe pouvant d'ailleurs être vide comme le montre l'exemple du branchement simple).

4. Fibrés en droites

On se restreint maintenant aux fibrés en droites localement triviaux sur X ayant un espace total séparé (on les qualifiera d'ailleurs simplement de « fibrés en droites »). Un tel fibré a pour groupe structural le groupe G des homéomorphismes de $\mathbf{R}$.

4.1 *Proposition. Le groupe structural d'un fibré en droites sur X peut être réduit au groupe G^+ des homéomorphismes croissants de* $\mathbf{R}$.

4.2 *Hypothèse. On suppose dans la suite que cette réduction à G^+ est toujours faite.*

Soit $\eta : E \xrightarrow{p} X$ un fibré en droites sur X.

4.3 *Proposition. Le choix d'un ordre sur X est équivalent au choix d'une orientation sur l'espace total E.*

Soit $\eta' : E' \xrightarrow{p'} X$ un second fibré en droites sur X, et soit (F, f), $F : E \to E'$ et $f : X \to X$, un isomorphisme de η sur η' pour le groupe G^+. Alors:

4.4 *Proposition. Pour que F soit compatible avec les orientations de E et E' (correspondant à un ordre sur X) il faut et il suffit que f soit croissant.*

Par contre si (F, f) est seulement un isomorphisme pour le groupe G, F est compatible avec ces orientations si et seulement si f est décroissant.