3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.05.2024**

2.3. *Rappel.* Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit complètement intégralement clos si: $x \in K$, $d \in A - \{o\}$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $dx^n \in A$ implique $x \in A$.

(Pour montrer l'assertion 2.2 il suffit d'appliquer la définition 1.6. (i) à la fraction rationnelle $\dfrac{d}{1 - xX}$.)

Ces deux résultats font poser la question: la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [1] ? A ce propos on notera que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 (cf. exemple de Nakayama [7], cf. aussi [2], Algèbre commutative, VI, § 4, exercice 6).

2.4. *La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 [4].

2.5. *La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale* [1] *et aux anneaux de polynômes* [3], *mais ne passe pas aux localisés* [4] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).

3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

Etant donné l'assertion 2.2., il reste à montrer que la condition est suffisante. Soit donc A un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions K et soit $P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle normalisée de $K(X)$ dont le développement en série à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans A. Il s'agit de montrer que $Q(X)$ appartient à A $[X]$.

Comme $Q(o) = 1$, $Q(X)$ est égal au produit $\prod_{0 \leq i \leq q} (1 - \alpha_i X)$ où q est le degré de $Q(X)$ et où les α_i sont les inverses des racines de $Q(X)$ dans un corps de décomposition. Pour que les coefficients de $Q(X)$ soient dans A il faut et il suffit que les α_i soient entiers sur A. Comme la fermeture intégrale dans une extension de corps d'un anneau complètement intégralement clos est aussi un anneau complètement intégralement clos ([2], Algèbre commutative, V, § 1, exercice 14), on peut supposer que les racines de $Q(X)$ sont dans K et il s'agit de montrer que leurs inverses sont dans A. Soit donc $\alpha \in K$ tel que $Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = o$. Soit $d \in A - \{o\}$ tel que $R(X) = d \,.\, Q(X)/(1-\alpha X)$ soit dans $A[X]$ et considérons le développement en série $\Sigma b_n X^n$ de la fraction rationnelle $d \,.\, P(X)/(1-\alpha X) = R(X) . (P(X)/Q(X))$. Les b_n vérifient la relation de récurrence:

$$b_{n+1} = \alpha \,.\, b_n \text{ (pour } n \geqq q) \text{ et donc:}$$

$$b_{n+q} = \alpha^n \,.\, b_q \text{ (pour } n \geqq o).$$

En outre b_q ne peut être nul, sinon tous les b_{q+n} seraient nuls, $P(X)/(1-\alpha X)$ serait un polynôme, $\frac{1}{\alpha}$ serait racine de $P(X)$ et la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ ne serait pas normalisée.

D'autre part, l'égalité:

$(\Sigma a_n X^n) \,.\, R(X) = \Sigma b_n X^n$ montre que, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} est combinaison des a_m et des coefficients de $R(X)$ qui sont dans A, les uns par hypothèse, les autres par construction. Ainsi, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} c'est-à-dire $\alpha^n \,.\, b_q$ appartient à A et, A étant complètement intégralement clos, α appartient à A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU, B. Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, pp. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).

[2] BOURBAKI, N. Eléments de mathématique. Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).

[3] CAHEN, P.-J. Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 94, 1970, pp. 81-83.

[4] CHABERT, J.-L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 273-283.

[5] DRESS, Fr. Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, pp. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[6] FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta. Math.*, Uppsala, t. 30, 1906, pp. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).

[7] NAKAYAMA, T. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, *Proc. Imp. Acad.* Tokyo, t. 18, 1942, pp. 185-187 et pp. 233-236, et, *Proc. Japan Acad.*, t. 22, 1946, pp. 249-250.

[8] PISOT, Ch. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[9] POLYA, G. Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Ann.*, t. 77, 1916, pp. 497-513.

(Reçu le 24 février 1972).

Jean-Luc Chabert
10, Villa des Gobelins
75-Paris 13e