

### **3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.05.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2.3. *Rappel.* Un anneau intègre  $A$  de corps des fractions  $K$  est dit complètement intégralement clos si:  $x \in K$ ,  $d \in A - \{0\}$  et,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $dx^n \in A$  implique  $x \in A$ .

(Pour montrer l'assertion 2.2 il suffit d'appliquer la définition 1.6. (i) à la fraction rationnelle  $\frac{d}{1 - xX}$ .)

Ces deux résultats font poser la question: la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [1]? A ce propos on notera que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 (cf. exemple de Nakayama [7], cf. aussi [2], Algèbre commutative, VI, § 4, exercice 6).

2.4. *La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 [4].*

2.5. *La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale [1] et aux anneaux de polynômes [3], mais ne passe pas aux localisés [4] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).*

### 3. UN ANNEAU EST DE FATOU SI ET SEULEMENT SI IL EST COMPLÈTEMENT INTÉGRALEMENT CLOS

Etant donné l'assertion 2.2., il reste à montrer que la condition est suffisante. Soit donc  $A$  un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions  $K$  et soit  $P(X)/Q(X)$  une fraction rationnelle normalisée de  $K(X)$  dont le développement en série à l'origine  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  est à coefficients dans  $A$ . Il s'agit de montrer que  $Q(X)$  appartient à  $A[X]$ .

Comme  $Q(0) = 1$ ,  $Q(X)$  est égal au produit  $\prod_{0 \leq i \leq q} (1 - \alpha_i X)$  où  $q$  est le degré de  $Q(X)$  et où les  $\alpha_i$  sont les inverses des racines de  $Q(X)$  dans un corps de décomposition. Pour que les coefficients de  $Q(X)$  soient dans  $A$  il faut et il suffit que les  $\alpha_i$  soient entiers sur  $A$ . Comme la fermeture intégrale dans une extension de corps d'un anneau complètement intégralement clos est aussi un anneau complètement intégralement clos ([2], Algèbre commutative, V, § 1, exercice 14), on peut supposer que les racines

de  $Q(X)$  sont dans  $K$  et il s'agit de montrer que leurs inverses sont dans  $A$ . Soit donc  $\alpha \in K$  tel que  $Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ . Soit  $d \in A - \{0\}$  tel que  $R(X) = d \cdot Q(X)/(1-\alpha X)$  soit dans  $A[X]$  et considérons le développement en série  $\sum b_n X^n$  de la fraction rationnelle  $d \cdot P(X)/(1-\alpha X) = R(X) \cdot (P(X)/Q(X))$ . Les  $b_n$  vérifient la relation de récurrence:

$$b_{n+1} = \alpha \cdot b_n \text{ (pour } n \geq q \text{) et donc:}$$

$$b_{n+q} = \alpha^n \cdot b_q \text{ (pour } n \geq 0 \text{).}$$

En outre  $b_q$  ne peut être nul, sinon tous les  $b_{q+n}$  seraient nuls,  $P(X)/(1-\alpha X)$  serait un polynôme,  $\frac{1}{\alpha}$  serait racine de  $P(X)$  et la fraction rationnelle  $P(X)/Q(X)$  ne serait pas normalisée.

D'autre part, l'égalité:

$(\sum a_n X^n) \cdot R(X) = \sum b_n X^n$  montre que, pour  $n \geq 0$ ,  $b_{q+n}$  est combinaison des  $a_m$  et des coefficients de  $R(X)$  qui sont dans  $A$ , les uns par hypothèse, les autres par construction. Ainsi, pour  $n \geq 0$ ,  $b_{q+n}$  c'est-à-dire  $\alpha^n \cdot b_q$  appartient à  $A$  et,  $A$  étant complètement intégralement clos,  $\alpha$  appartient à  $A$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU, B. Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, pp. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).
- [2] BOURBAKI, N. *Eléments de mathématique*. Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).
- [3] CAHEN, P.-J. Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, *Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 94, 1970, pp. 81-83.
- [4] CHABERT, J.-L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 273-283.
- [5] DRESS, Fr. Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 1, 1968, pp. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).
- [6] FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta. Math.*, Uppsala, t. 30, 1906, pp. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).
- [7] NAKAYAMA, T. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 18, 1942, pp. 185-187 et pp. 233-236, et, *Proc. Japan Acad.*, t. 22, 1946, pp. 249-250.
- [8] PISOT, Ch. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).
- [9] POLYA, G. Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Ann.*, t. 77, 1916, pp. 497-513.

(Reçu le 24 février 1972).

Jean-Luc Chabert  
10, Villa des Gobelins  
75-Paris 13<sup>e</sup>