

## III.5. Exemple

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Cette quantité est nulle car  $X^p - \xi^{p^{r-i+1}}$  est le polynome minimal de  $\xi^{p^{r-i}}$  sur  $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-i+1}}\right)$ .

*Remarque III.3.B*

$$\text{Tr}_{K_{l-1}/\mathbb{Q}}(\theta_{l-1}) = (-1)^{m_{r+1}}$$

Il suffit d'appliquer le lemme III.1 à  $\Omega\left(\frac{n_r}{p^{r-l+1}}\right)$  ou  $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)$ , suivant les cas.

*Remarque III.3.C*

Dans le cas où  $p = 2$  et  $u_r \geq 3$ , on a :

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = 0$$

En effet :

$$\sum_{s \in S_r} \xi^{s2^{r-l+1}} = \text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/K_{l-1}}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right)$$

et d'autre part

$$K_{l-1} \subseteq \Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$$

et

$$\text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)}\left(\xi^{2^{r-l+1}}\right) = 0$$

car  $X^2 - \xi^{2^{r-l+2}}$  est le polynome minimal de  $\xi^{2^{r-l+1}}$  sur  $\Omega\left(\frac{n_r}{2^{r-l+3}}\right)$ .

### III.5. EXEMPLE

Soit  $B$  la base introduite à la proposition III.3. On se propose de chercher les polynomes caractéristiques des  $\theta_i$ . Pour cela, il faut pouvoir calculer les coordonnées, par rapport à  $B$ , des produits mutuels d'éléments de  $B$ .

Les  $\theta_i$  sont des périodes de Gauss ([7] chapitre 7). On pose pour tout entier  $a$  :  $\eta(a) = \sum_{s \in S_r} \xi^{as}$ .

On a en particulier:

$$\theta_i = \eta(p^{r-i}) \quad \text{pour } l \leq i \leq r$$

et suivant les cas:

$$\theta_{l-1} = \eta(p^{r-l+1}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\eta(2^{r-l+2}).$$

Pour tout  $b$  appartenant à  $G(n_r)$ , le transformé de  $\eta(a)$  par  $b$  est  $\eta(ab)$ . En particulier les conjugués de  $\theta_i$ , pour  $l \leq i \leq r$ , seront:

$$\sigma^k(\theta_i) = \eta(g^k p^{r-i}).$$

Le produit de deux périodes  $\eta(a)$  et  $\eta(a')$  est donné par:  $\eta(a)\eta(a') = \sum_{s \in S_r} \eta(a+a's)$ . Appliquant cette formule à deux éléments de  $B$ , on est alors ramené au problème suivant: donner les coordonnées de  $\eta(a)$ ,  $a$  entier quelconque, dans la base  $B$ .

$c$  et  $c'$  désignent dans ce qui suit, des nombres premiers avec  $p$ .

1. Dans le cas  $p$  impair ou  $p = 2$  et  $u_r = 2$ ,  $\eta(p^u c)$ , avec  $u \geq r - l + 2$ , peut s'exprimer comme somme de périodes de la forme  $\eta(p^{r-l+1} c')$ . Il suffit d'écrire l'égalité:

$$\sum_{0 < k < p} \xi^{\frac{n_r}{p} k} = -1;$$

multipliant alors cette égalité par  $\xi^{p^u c}$  on obtient:

$$\sum_{0 < k < p} \eta\left(\frac{n_r}{p} k + p^u c\right) = -\eta(p^u c).$$

Les quantités  $\frac{n_r}{p} k + p^u c$  sont de la forme  $p^{r-l+1} c'$ .

Dans le cas où  $p = 2$  et  $u_r \geq 3$ ,  $\eta(2^u c)$ , avec  $u \geq r - l + 3$ , est l'opposé d'une période  $\eta(2^{r-l+2} c')$ .

2.  $\eta(p^u c)$ , avec  $u \leq r - l + 1$  (ou  $u \leq r - l + 2$ , suivant les cas) peut s'exprimer comme somme de périodes de la forme  $\eta(p^u c')$ ,  $c'$  appartenant à  $G(n_r)$ , en procédant de la même façon qu'au lemme III.2. C'est-à-dire: si  $v$  désigne le PGCD de  $c$  et de  $n_r$ , et  $m_v$  le nombre de diviseurs premiers de  $v$ , on a:

$$\sum_{\substack{0 < k < v \\ \text{PGCD}(k,v)=1}} \xi^{\frac{n_r}{v} k} = (-1)^{m_v}$$

d'où:

$$(-1)^{mv} \eta(p^u c) = \sum_{\substack{0 < k < v \\ \text{PGCD}(k,v)=1}} \eta\left(\frac{n_r}{v} k + p^u c\right)$$

Les quantités  $\frac{n_r}{v} k + p^u c$  sont de la forme  $p^u c'$ , avec  $c'$  premier avec  $n_r$ .

*Cas particulier :*

Si  $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right) \subset K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^u}\right)$  et  $u \leq r - l$ , alors  $\eta(p^u c) = 0$ .

En effet on a: 
$$\text{PGCD}\left(\frac{n_r}{p^u}, \frac{n_r}{v}\right) = \frac{n_r}{p^u v}.$$

D'où  $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right) \subset \Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)$ . En employant la même méthode que dans la démonstration de la proposition III.3,  $\eta(p^u c)$  est égal, à un coefficient près, à:

$$\text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)/K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right)}(\xi^{p^u c})$$

Comme  $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right) \supset K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^u}\right)$  et comme  $u \leq r - l$ , on aura donc:

$$K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}}\right) \supseteq K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right).$$

$\Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}v}\right)$  sera donc compris entre  $K_r \cap \Omega\left(\frac{n_r}{v}\right)$  et  $\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)$  et l'on a

$$\text{Tr}_{\Omega\left(\frac{n_r}{p^u v}\right)/\Omega\left(\frac{n_r}{p^{u+1}v}\right)}(\xi^{p^u c}) = 0$$

3.  $\eta(p^u c)$ , avec  $u \leq r - l + 1$  (ou  $u \leq r - l + 2$  suivant le cas) et  $c$  premier avec  $n_r$ , est un conjugué de  $\eta(p^u) = \theta_{r-u}$  (à moins qu'il ne soit nul; remarque III.3.C).

S'il n'est pas dans  $B$ , alors ses conjugués sur  $K_{r-u-1}$ , seront dans  $B$  et il suffit alors d'utiliser la remarque III.3.A.

Considérons par exemple, la suite de corps cyclotomiques vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis:  $\Omega(17)$ ,  $\Omega(8.17)$ ,  $\Omega(16.17)$ .

On a donc  $r = 3$ ;  $l = 2$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ;  $p_1 = 17$ .

Il y a quatre extensions  $K_3$ , cycliques de degré 8 sur  $Q$  associées à cette suite (proposition I.5 bis).

Elles ont pour discriminant sur  $Q$ :  $2^{22} 17^7$  (proposition II.3).

$T(16.17, 17)$  a pour éléments 1, 35, 69, 103, 137, 171, 205, 239.

$a_0 = 239$  et l'on peut choisir comme générateur de  $T(16.17, 4.17)$ :

$$a'_0 = 69.$$

On cherche de même les éléments de  $T(16.17, 16)$  et un générateur  $c_1$  de ce sous-groupe. On peut prendre par exemple  $c_1 = 65$ . Les puissances successives de  $c_1$  sont données par le tableau suivant:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
65	145	177	81	97	49	193	33	241	161	129	225	209	257	113

$S_3$  est engendré par  $\{c_1^8, c_1^{\alpha_0} a_0, c_1^{\alpha'_0} a'_0\}$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha'_0$  vérifiant les conditions  $\alpha_0 \equiv 0(4)$ ;  $\alpha'_0 \equiv 0(2)$  et  $\alpha'_0 \not\equiv 0(4)$  (proposition I.4 bis). Les éléments de  $S_3$  sont de la forme:

$$s = c_1^{8\beta_1 + \alpha_0\beta_0 + \alpha'_0\beta'_0} \begin{matrix} \beta_0 & \beta'_0 \\ a_0 & a'_0 \end{matrix}$$

avec  $\beta_0 = 0$  ou 1;  $\beta'_0 = 0, 1, 2$  ou 3;  $\beta_1 = 0$  ou 1.

Prenons par exemple:  $\alpha_0 = 4$  et  $\alpha'_0 = 2$ .

Le tableau suivant donne les valeurs de  $s$ , en fonction de  $\beta_0, \beta'_0, \beta_1$ . On trouve donc à la dernière ligne les éléments de  $S_3$ :

$\beta_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\beta'_0$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$\beta_1$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$s$	1	213	217	253	33	229	89	189	47	219	135	195	191	155	103	179

On remarque que  $3^4 = 81$  n'appartient pas à  $S_3$ , c'est-à-dire que la classe de 3 modulo  $S_3$  est un générateur de  $\frac{G(16.17)}{S_3}$ .

On prendra donc  $g = 3$ . Les classes de  $G(16.17) \text{ mod. } S_3$  sont données dans le tableau suivant:

$S_3$	1	213	217	253	33	229	89	189	47	219	135	195	191	155	103	179
$3S_3$	3	95	107	215	99	143	267	23	141	113	133	41	29	193	37	265
$3^2S_3$	9	13	49	101	25	157	257	69	151	67	127	123	87	35	111	251
$3^3S_3$	27	39	147	31	75	199	227	207	181	201	109	97	261	105	61	209
$3^4S_5$	81	117	169	93	225	53	137	77	271	59	55	19	239	43	183	83
$3^5S_3$	243	79	235	7	131	159	139	231	269	177	165	57	173	129	5	249
$3^6S_3$	185	237	161	21	121	205	145	149	263	259	223	171	247	115	15	203
$3^7S_3$	11	167	211	63	91	71	163	175	245	233	125	241	197	73	45	65

$B = \{ \eta(1), \eta(3), \eta(3^2), \eta(3^3), \eta(2), \eta(2.3), \frac{1}{2} \eta(8), \frac{1}{2} \eta(8.3) \}$  est une base de l'anneau des entiers de  $K_3$ . On cherche le polynome minimal de  $\eta(1)$  sur  $K_2$ . Le conjugué de  $\eta(1)$  sur  $K_2$  est  $\eta(3^4)$  et d'après la remarque III.3.A,  $\eta(1) + \eta(3^4) = 0$ .

D'autre part:  $\eta(1)^2 = \sum_{s \in S_3} \eta(1+s)$ .

Il reste à exprimer chacun des  $\eta(1+s)$  en fonction de:  $\eta(2), \eta(2.3), \eta(8)$ , et  $\eta(8.3)$ .

Par exemple: pour  $s = 213$ :  $\eta(1+213) = \eta(2.107) = \eta(2.3)$  car  $107 \in 3S_3$ .

Pour  $s = 33$ :  $\eta(1+33) = \eta(2.17) = 0$  car  $\Omega(16) \cap K_3 = Q \subset K_2 = \Omega(8.17) \cap K_3$ .

Pour  $s = 47$ , on écrit  $\xi^{8.17} = -1$  d'où  $\xi^{8.17+48} = -\xi^{48}$  c'est-à-dire:  $\eta(1+47) = -\eta(8.23) = -\eta(8.3)$ .

Pour  $s = 195$ :  $\eta(1+195) = \eta(4.49) = 0$  compte tenu de la remarque III.3.C.

Finalement on obtient:  $\eta(1)^2 = -16 - \eta(2) - 2\eta(8.3) + \eta(8)$ . Le polynome minimal de  $\eta(1)$  sur  $K_2$  est donc:

$$X^2 + 16 + \eta(2) + 2\eta(3.8) - \eta(8)$$

On calcule de la même façon le polynome minimal de  $\eta(2)$  sur  $K_1$ :  $X^2 - \eta(8) - 16$  et celui de  $\eta(8)$  sur  $Q$ :  $X^2 - 2X - 16$ .

Les 8 nombres:

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \sqrt{17 + \sqrt{17}}, \sqrt{17 - \sqrt{17}},$$

$$\sqrt{-17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{17 + \sqrt{17}}}, \sqrt{-17 - 3\sqrt{17} - \sqrt{17 - \sqrt{17}}}$$

$$\sqrt{-17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{17 + \sqrt{17}}} \text{ et } \sqrt{-17 - 3\sqrt{17} + \sqrt{17 - \sqrt{17}}}$$

forment une base de l'anneau des entiers de  $K_3$ .

Pour les autres valeurs de  $\alpha_0$  et  $\alpha'_0$  le résultat est le suivant: les polynomes minimaux de  $\eta(8)$  et  $\eta(2)$  restent les mêmes que précédemment. Pour obtenir une base des entiers des autres extensions  $K_3$  admettant la même suite de corps cyclotomiques associée:  $\Omega(17)$ ,  $\Omega(8.17)$ ,  $\Omega(16.17)$ , il suffit d'ajouter aux quatre nombres:

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \sqrt{17 + \sqrt{17}}, \sqrt{17 - \sqrt{17}},$$

les quatre autres quantités:

*Pour le corps  $K_3$  correspondant à  $\alpha_0 = 4$  et  $\alpha'_0 = 6$ :*

$$\sqrt{-17 + 3\sqrt{17} + 3\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 4\sqrt{17 - \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{-17 - 3\sqrt{17} + 3\sqrt{17 - \sqrt{17}} + 4\sqrt{17 + \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{-17 + 3\sqrt{17} - 3\sqrt{17 + \sqrt{17}} + 4\sqrt{17 - \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{-17 - 3\sqrt{17} - 3\sqrt{17 - \sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + \sqrt{17}}},$$

*Pour le corps  $K_3$  correspondant à  $\alpha_0 = 8$  et  $\alpha'_0 = 2$ :*

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{17 - \sqrt{17}}}, \sqrt{17 - 3\sqrt{17} - \sqrt{17 + \sqrt{17}}}$$

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{17 - \sqrt{17}}}, \sqrt{17 - 3\sqrt{17} + \sqrt{17 + \sqrt{17}}}$$

Pour le corps  $K_3$  correspondant à  $\alpha_0 = 8$  et  $\alpha'_0 = 6$ :

$$\sqrt{17 - 3\sqrt{17} + 3\sqrt{17 + \sqrt{17}} - 4\sqrt{17 - \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + 3\sqrt{17 - \sqrt{17}} + 4\sqrt{17 + \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{17 - 3\sqrt{17} - 3\sqrt{17 + \sqrt{17}} + 4\sqrt{17 - \sqrt{17}}},$$

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - 3\sqrt{17 - \sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + \sqrt{17}}}.$$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] SAMUEL, P. Théorie algébrique des nombres (Hermann).
- [2] Mac CARTHY, P. J. Algebraic extensions of fields (Blaisdell Publishing Company).
- [3] HERBRAND, J. Développement moderne de la théorie des corps algébriques. *Mémorial des Sciences Mathématiques* (fasc. LXXV, 1936).
- [4] CHEVALLEY, C. Théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. *Journ. of the Faculty of Sciences*, Tokyo 1933, 365.
- [5] LANG, S. Algebraic Numbers (Addison-Wesley Publishing Company).
- [6] — Algebra (Addison-Wesley Publishing Company).
- [7] VAN DER WAERDEN, B. L. Modern Algebra, vol. I (F. Ungar Publishing Company).

(Reçu le 26 octobre 1971)

Bernard Oriat  
Faculté des sciences  
Route de Gray  
F-25 — Besançon