

I.9. Conditions d'inclusion de K_r dans $K_{r'}$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

choix d'un sous-groupe S_r . Il suffit alors de chercher le nombre de valeurs que peuvent prendre les α_j vérifiant cette condition, I.3.A et I.3.B.

PROPOSITION I.5 bis.

Etant donnée une suite de corps cyclotomiques $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant les conditions I.2.A bis et I.2.B bis, le nombre d'extensions K_r , de degré 2^r sur Q , cycliques sur Q , admettant comme suite de corps cyclotomiques associée, la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ est :

— Dans le cas où $3 \leq u_r \leq r + 1$:

$$2^{r-l+1} 2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = r + 2$, en posant $m_0 = 0$:

$$2 \prod_{1 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

— Dans le cas où $u_r = 0$ ou 2 :

$$2^{(r-1)(m_1-1)} \prod_{2 \leq i \leq r} 2^{(r-i)(m_i-m_{i-1})}$$

I.9. CONDITIONS D'INCLUSION DE K_r DANS $K_{r'}$.

PROPOSITION I.6.

Soit K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier impair). Soit $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r .

Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $p^{r'}$ sur Q , contenant K_r , si et seulement si la suite $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ vérifie la condition :

I.6.A : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i$, $p_j \equiv 1 \pmod{p^{r'-i+1}}$.

Compte tenu de I.2.B, la condition I.6.A est nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, construisons une extension $K_{r'}$ contenant K_r .

Plaçons-nous dans le cas où $2 \leq u_r \leq r$ et posons $n'_i = n_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $n'_i = p^{i-r}n_r$ pour $r < i \leq r'$. La suite $(\Omega(n'_i))_{1 \leq i \leq r'}$ vérifie alors les conditions I.2.A et I.2.B.

Soit π la surjection de $G(n'_r)$ sur $G(n_r)$ qui à toute classe modulo n'_r fait correspondre la classe modulo n_r qui la contient. C'est aussi l'application qui à tout automorphisme de $\Omega(n'_r)$ fait correspondre sa restriction à $\Omega(n_r)$.

Soient $b'_0, c'_1, c'_2, \dots, c'_{m_r}$ des générateurs des sous-groupes

$$T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p^{u_{r'}}}\right), T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_1}\right), \dots, T\left(n'_{r'}, \frac{n'_{r'}}{p_{m_r}}\right)$$

et soit

$$b_0 = \pi(b'_0), c_1 = \pi(c'_1), \dots, c_{m_r} = \pi(c'_{m_r}).$$

Alors b_0, c_1, \dots, c_{m_r} sont des générateurs de

$$T\left(n_r, \frac{n_r}{p^{u_r}}\right), T\left(n_r, \frac{n_r}{p_1}\right), \dots, T\left(n_r, \frac{n_r}{p_{m_r}}\right).$$

Soit S_r le sous-groupe de $G(n_r)$ admettant K_r comme corps fixe. D'après la proposition I.3, il existe $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_r}$ vérifiant I.3.A et I.3.B et tels que S_r soit engendré par :

$$\{c_1^{p^r}, c_1^{\alpha_0} b_0, c_1^{\alpha_j} c_j; 2 \leq j \leq m_r\}.$$

Soit $S'_{r'}$ le sous-groupe de $G(n'_{r'})$ engendré par : $\{c_1^{p^{r'}}, c_1^{\alpha'_0} b'_0, c_1^{\alpha'_j} c'_j; 2 \leq j \leq m_r\}$ et soit $K_{r'}$ le sous-corps de $\Omega(n'_{r'})$ corps fixe de $S'_{r'}$. D'après la proposition I.4, $K_{r'}$ est une extension cyclique de degré $p^{r'}$ de Q .

D'autre part, on vérifie que $\pi(S'_{r'}) \subset S_r$ qui prouve que $K_{r'}$ contient K_r .

Remarque : On a construit, en fait, plusieurs extensions $K'_{r'}$ contenant K_r . S_r étant donné, les α_i ne sont déterminés que modulo p^r et si l'on remplace α_i par α'_i tel que $\alpha_i \equiv \alpha'_i (p^r)$ et $\alpha_i \not\equiv \alpha'_i (p^{r'})$ on obtiendra un autre sous-groupe $S'_{r'}$.

Dans le cas où $u_r = r + 1$, la démonstration est analogue.

Dans le cas où $u_r = 0$, on pose simplement $n'_i = n_r$ pour tout i entre r et r' et l'application π est alors l'identité.

PROPOSITION I.6 bis.

Soit K_r une extension cyclique de degré 2^r sur Q , $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r et soit r' un entier strictement supérieur à r . Il existe une extension $K_{r'}$ cyclique de degré $2^{r'}$ sur Q , contenant K_r si et seulement si :

I.6.A bis : Pour tout i de 1 à r et tout $j \leq m_i, p_j \equiv 1 (2^{r'-i+1})$.

I.6.B bis : K_r est réelle.

I.6.A bis s'obtient à partir de I.2.B bis.

D'autre part il est nécessaire que K_r soit réelle car: $(-1)^2 = 1 \in S_r$, implique, d'après le lemme I.1, $-1 \in S_i$ pour tout $i < r'$. Donc tous les sous-corps stricts de K_r sont réels.

Pour démontrer la réciproque, on peut remarquer que:

si $u_r = 0$, -1 se décompose dans les sous-groupes $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ de la façon suivante:

$$-1 = \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

On déduit de la condition I.6.A *bis* que si $j \leq m_i$, alors $\frac{p_j-1}{2} \equiv 0 \pmod{2^{r-i+1}}$

et compte tenu du lemme I.2 *bis*, $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$. Donc $-1 \in S_r$ et K_r est réelle.

Donc si $u_r = 0$, I.6.B *bis* est une conséquence de I.6.A *bis* et on démontre l'existence de K_r comme précédemment.

Si maintenant $u_r \geq 2$, -1 se décompose dans $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ et $T\left(n_r, \frac{n_r}{p_j}\right)$ sous la forme:

$$-1 = a_0 \prod_{1 \leq j \leq m_r} c_j^{\frac{p_j-1}{2}}.$$

La condition I.6.A *bis* implique donc comme précédemment, que $c_j^{\frac{p_j-1}{2}} \in S_r$ d'où $-a_0 \in S_r$.

Si $u_r = 2$, $a_0 \notin S_r$ (lemme I.2 *bis*) donc les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* sont incompatibles.

Si $u_r \geq 3$, les conditions I.6.A *bis* et I.6.B *bis* impliquent donc $a_0 \in S_r$, d'où $a_0 \equiv 0 \pmod{2^r}$.

On termine la démonstration comme précédemment.

CHAPITRE II

DÉCOMPOSITION, RAMIFICATION, DISCRIMINANT

II.1. RAPPELS

Soient K et K' deux corps de nombres, K' étant abélien sur K . Soient A et A' leurs anneaux d'entiers respectifs et \mathfrak{p} un idéal premier de A . $\mathfrak{p}A'$ se décompose en idéaux premiers de A' sous la forme: $\mathfrak{p}A' = \left(\prod_{1 \leq v \leq g} \mathfrak{p}_v \right)^e$