

# I.2. Plus petit corps cyclotomique contenant une extension ABÉLIENNE DE DEGRÉ $p^r$ SUR $Q$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$ . Comme d'autre part  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$  est cyclique,  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$  et  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)^{((p_i - 1) p_i^{s_i - 1})^*}$  possèdent le même nombre d'éléments.  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i - s_i}}\right)$  est donc l'ensemble des puissances  $((p_i - 1) p_i^{s_i - 1})^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{p_i^{r_i}}\right)$ .

Rappelons que si  $r \geq 3$ ,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2^r}\right)^*$  est produit direct de  $\{-1, 1\}$  et de  $T(2^r, 4)$ . Si  $p_i = 2$ ,  $r_i \geq 3$ , posons  $a_0 = \theta_i^{-1}(-1)$ ;  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$  est produit direct de  $\{a_0, 1\}$  et de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$  qui est cyclique. Pour tout  $s_i$  entre 3 et  $r_i$ ,  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - s_i}}\right)$  est alors l'ensemble des puissances  $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i}}\right)$ . C'est aussi l'ensemble des puissances  $(2^{s_i - 2})^{\text{eme}}$  d'éléments de  $T\left(n, \frac{n}{2^{r_i - 2}}\right)$ .

## I.2. PLUS PETIT CORPS CYCLOTOMIQUE CONTENANT UNE EXTENSION ABÉLIENNE DE DEGRÉ $p^r$ SUR $Q$

### PROPOSITION I.1.

Soit  $r$  un entier positif,  $p$  un nombre premier impair,  $K$  une extension abélienne de degré  $p^r$  sur  $Q$ ,  $\Omega(n)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K$ . Alors  $n$  est de la forme  $n = p^s p_1 p_2 \dots p_m$  et vérifie les conditions:

—  $0 \leq s \leq r + 1$ .

—  $s \neq 1$ .

— Les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts et congrus à 1 modulo  $p$ .

\*)  $G^{(n)}$  désigne le sous-groupe de  $G$  formé des puissances  $n^{\text{eme}}$  d'éléments de  $G$ .

Le théorème de Kronecker permet d'affirmer qu'il existe  $n'$  tel que  $\Omega(n')$  contienne  $K$ . Soit  $n' = p^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$  la décomposition de  $n'$  en facteurs premiers et soit  $S$  le sous-groupe de  $G(n')$  constitué par les  $K$ -automorphismes.

1. Montrons que si  $p_i \not\equiv 1 (p)$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$ . Il est équivalent de montrer que  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right) \subseteq S$ ; soit  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$ , puisque  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i}}\right)$  est d'ordre  $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$ , on aura donc:  $h^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$  ( $1_{\Omega(n')}$  désignant l'identité sur  $\Omega(n')$ ). Si  $\sigma$  est la restriction de  $h$  à  $K$ , on aura également  $\sigma^{(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}} = 1_K$ . D'autre part  $\sigma^{p^r} = 1_K$  puisque  $K$  est de degré  $p^r$  sur  $Q$ . Comme  $(p_i - 1)p_i^{u_i - 1}$  et  $p^r$  sont premiers entre eux, on en déduit que  $\sigma = 1_K$  et  $h \in S$ .

2. Montrons que si  $p_i \equiv 1 (p)$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$ . Cela revient à démontrer que  $T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right) \subseteq S$ .

Soit  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p_i^{u_i - 1}}\right)$ , puisque ce sous-groupe est d'ordre  $p_i^{u_i - 1}$ , on aura donc  $h^{p_i^{u_i - 1}} = 1_{\Omega(n')}$ . D'où,  $\sigma$  étant la restriction de  $h$  à  $K$ ,  $\sigma^{p_i^{u_i - 1}} = 1_K$ . D'autre part  $\sigma^{p^r} = 1_K$  pour la même raison que précédemment. Comme  $p_i^{u_i - 1}$  et  $p^r$  sont premiers entre eux,  $\sigma = 1_K$  et  $h \in S$ .

3. Montrons que  $s \leq r + 1$ , c'est-à-dire, montrons que si  $u \geq r + 2$  alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right)$ .

En effet si  $u \geq r + 2$ ,  $T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{p^u}\right)^{(p - 1)p^r}$ . Tout élément  $h \in T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right)$  est donc une puissance  $(p^r)^{\text{ème}}$ . Il en est de même de la restriction de  $h$  à  $K$  qui est l'identité de  $K$ , puisque  $K$  est de degré  $p^r$  sur  $Q$ . On a donc  $T\left(n', \frac{n'}{p^{u - r - 1}}\right) \subseteq S$ .

4. Montrons enfin que  $s \neq 1$ .

Pour cela, montrons que si  $u = 1$ , alors  $K \subseteq \Omega\left(\frac{n'}{p}\right)$ . Si  $u = 1$ , alors

$T\left(n', \frac{n'}{p}\right)$  a pour ordre  $p - 1$  et comme  $p - 1$  est premier à  $p^r$ , on en déduit  
 $T\left(n', \frac{n'}{p}\right) \subseteq S$ .

PROPOSITION I.1 bis.

Soit  $r$  un entier positif et  $K$  une extension abélienne de degré  $2^r$  sur  $Q$ ,  $\Omega(n)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K$ . Alors  $n$  est de la forme  $n = 2^s p_1 p_2 \dots p_m$  et vérifie la condition

—  $0 \leq s \leq r + 2$ .

— Les  $p_i$  sont des nombres premiers impairs distincts.

La démonstration est analogue à la précédente. Pour montrer que  $s \leq r + 2$ , on constate que si  $u \geq r + 3$  et si  $n' = 2^u p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}$ , alors

$$T\left(n', \frac{n'}{2^{u-r-2}}\right) = T\left(n', \frac{n'}{2^u}\right)^{2^r}.$$

### I.3. SUITE DE CORPS CYCLOTOMIQUES ASSOCIÉE A UNE EXTENSION CYCLIQUE $K_r$

DÉFINITION:

Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  ( $p$  premier) sur  $Q$ . Pour  $i$  entre 1 et  $r$  soit  $K_i$  l'unique sous-corps de  $K_r$  de degré  $p^i$  sur  $Q$ . Soit  $\Omega(n_i)$  le plus petit corps cyclotomique contenant  $K_i$ . On appellera « suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$  » la suite des  $r$  corps  $\Omega(n_i)$ .

PROPOSITION I.2.

Soit  $r$  un entier positif et  $p$  un nombre premier impair. Soit  $K_r$  une extension cyclique de degré  $p^r$  sur  $Q$ . Soit  $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$  la suite de corps cyclotomiques associée à  $K_r$ .

Alors les  $n_i$  vérifient les conditions suivantes:

I.2.A. Pour tout  $i$  de 1 à  $r$ , la décomposition de  $n_i$  en facteurs premiers est  $n_i = p^{u_i} p_1 \dots p_{m_i}$ ; la suite  $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$  est non décroissante. La suite  $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$  est non décroissante, éventuellement nulle.