

§9. Evaluations pour la fonction $g(x, y)$ du théorème 5

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 9. EVALUATIONS POUR LA FONCTION $g(x, y)$ DU THÉORÈME 5

1. D'après sa « construction », g ainsi que ses dérivées premières sont majorées sur un voisinage compact de $\partial G \times G$, donc sur $\partial G_\nu \times G_\nu$, indépendamment de ν pour ν supérieur à un ν_0 convenable. Pour majorer le noyau $A_{nq}(x, y)$ le seul problème est donc de minorer le dénominateur où intervient g à une certaine puissance.

Lemme 9.1. Il existe un voisinage compact de $\partial G \times G$, des constantes $K_1 > 0$ et $b > 0$ de telle sorte que l'on ait

$$\forall (x, y) \in K \quad \text{avec} \quad |x - y| \leq b, \quad |g(x, y)| \geq K_1 |P(x, y)|.$$

Ceci résulte immédiatement de la « construction » de g ; avec les notations de la démonstration du théorème 5, on avait

$$|x - y| \leq b, \quad g(x, y) = P(x, y) e^{C(x,y) - A(x,y)}$$

d'où le résultat.

Nous sommes ramené à minorer $|P(x, y)|$.

2. *Minoration de $Re P(x, y)$.*

On rappelle qu'on a obtenu en (6) § 5.2.

$$Re P(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] + 0(|x - y|^3).$$

La plurisousharmonicité de φ entraîne que, pour x dans un voisinage compact de ∂G , il existe $C > 0$ tel que

$$\partial \otimes \bar{\partial} \varphi(x) [x - y, x - y] \geq C |x - y|^2.$$

On a aussi $\exists \delta, |x - y| \leq \delta \Rightarrow 0(|x - y|^3) \leq \frac{C}{2} |x - y|^2$.

Donc $\forall \nu \geq \nu_0$ (ν_0 choisi assez grand)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \\ |x - y| \leq \delta \end{array} \right. \Rightarrow Re P(x, y) \geq \frac{C}{2} |x - y|^2.$$

On a remarqué que $(x, y) \in \partial G_\nu \times G_\nu \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \geq 0$ et ce terme disparaît.

3. *Minoration de $| \operatorname{Im} P(x, y) |$.*

Utilisons ici la définition de $P(x, y)$, § 5.2 (4),

$$P(x, y) = 2 \partial \varphi(x) [x - y] - \partial \otimes \partial \varphi(x) [x - y, x - y],$$

d'où $P(x, y) = 2 \partial \varphi(y) [x - y] + 0 (|x - y|^2)$. Mais $\partial \varphi(y) [x - y] = \frac{1}{2} \{ d\varphi(y) [x - y] - i d\varphi(y) [i(x - y)] \}$ d'après le § 1.1, lemme 1.1, d'où $\operatorname{Im} P(x, y) = -i d\varphi(y) [i(x - y)] + 0 (|x - y|^2)$.

Pour chaque y utilisons maintenant un système de coordonnées d'origine y , tel que l'hyperplan tangent H à la « surface » $\{ x \mid \varphi(x) = \varphi(y) \}$ est $x'_1 = 0$, et $iH = \{ x \mid x''_1 = 0 \}$, $x - y = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$.

Dans ces conditions $\left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| = |d\varphi(y)|$,

$$| \operatorname{Im} P(x, y) | = \left| \frac{d\varphi}{dx'_1}(y) \right| \times |x'_1| + 0 (|x - y|^2).$$

$|d\varphi(y)|$ est une fonction continue dans un voisinage compact de ∂G , donc minorée par une constante strictement positive. Il existe donc $A > 0$, $B > 0$ et v_0 , tel que si $v \geq v_0$

$$(3) \quad \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, | \operatorname{Im} P(x, y) | \geq A |x''_1| - B |x - y|^2.$$

4. *Minoration de $|P(x, y)|$ et $|g(x, y)|$.*

Pour tirer le meilleur parti de (2) et (3) nous avons besoin du lemme

Lemme 9.2. [2] $\forall \alpha, \beta, \gamma$ dans \mathbf{R} , $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $0 < \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Démonstration. Si $\alpha \geq \beta - \gamma$,

$$\max (\alpha, \beta - \gamma) = \alpha = \alpha \frac{\alpha + (\alpha + \gamma)}{2\alpha + \gamma} \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta} (\alpha + \beta).$$

Si $\alpha < \beta - \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$. Alors $(\alpha + \gamma)^2 \leq \beta(\alpha + \gamma)$, ou $\alpha^2 \leq -\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \beta\alpha + \gamma$, $\alpha^2 + \alpha\beta \leq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$, $\alpha(\alpha + \beta) \leq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$,

d'où $\max(\alpha, \beta - \gamma) = \beta - \gamma \geq \frac{\alpha}{2\alpha + \beta}(\alpha + \beta)$.

A partir de (2) et (3) il est clair que pour (x, y) convenables

$$|P(x, y)| \geq \max\left(\frac{c}{2}|x-y|^2, A|x''_1| - B|x-y|^2\right)$$

d'où $|P(x, y)| \geq \frac{\frac{c}{2}}{c+B} \left(\frac{c}{2}|x-y|^2 + A|x''_1|\right)$ d'après le lemme 9.2.

Concluons:

$$(4) \begin{cases} \exists k_1 > 0, v_0 \in \mathbf{N}, \delta > 0, \\ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |P(x, y)| \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \geq k_1(|x-y|^2 + |x''_1|) \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 9.1 on a:

$$\exists k > 0, \exists v_0 \in \mathbf{N}, \exists \eta > 0,$$

$$(4') \begin{cases} \{ \forall (x, y) \in \partial G_v \times G_v, \forall v \geq v_0, |x-y| \leq \eta \} \\ \Rightarrow |g(x, y)| \geq k(|x-y|^2 + |x''_1|). \end{cases}$$

§ 10. SOLUTION BORNÉE DE $\bar{\partial}\alpha = \beta$

1. Majoration des ζ_v .

On rappelle

$$\zeta_v(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_v} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y) \quad (\S 7.1)$$

et d'après les théorèmes 7 (§ 5), 2 et 3,

$$A_{nq} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \left(\frac{n-1}{q}\right) A(f^*, g^*),$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^r a_{qk} D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g} \right).$$