Chapitre III UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

On porte cette relation dans le théorème 4 ainsi on en tire:

THÉORÈME 8.

Pour chaque domaine strictement pseudo-convexe G de $\mathbf{C}^n$, avec un bord de classe $\mathscr{C}^4$, il existe des doubles formes $\Omega_{nq}(x, y)$ et $A_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^1_{n, n-q-1; o, q}(W)$ et $C^1_{n, n-q-2; o, q}(W)$ sur un ouvert W contenant $\partial G \times G$, de telle sorte que ce qui suit est valable:
Si $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{pq}(\bar{G})$, alors $\forall y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\left[\int_{x\in\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{nq}(x, y) + (-1)^{q+1} \int_{x\in\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{nq}(x, y\right.$$
$$\left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)\right] + \bar{\partial}_y \Gamma(y)\,.$$

Avec $\Gamma \in \mathscr{C}^\infty_{(o, q-1)}(G)$. On rappelle $\bar{\partial}_y \Omega_{nq} = 0$ pour $q = 0$, $\Omega_{nq} = 0$ pour $q > 0$, Ω_{nq} et A_{qn} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ en y.

Il est clair que pour les domaines G_ν introduits au début de ce chapitre, la même représentation est valable avec les mêmes noyaux.

CHAPITRE III

UNE FORMULE DE RÉSOLUTION POUR L'ÉQUATION DE CAUCHY-RIEMANN

Si G est un domaine borné dans le plan avec un bord suffisamment régulier et g une fonction bornée $\mathscr{C}^\infty$ sur G, alors la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{g(x)}{x - y} dx \wedge d\bar{x}, \ y \in G\,,$$

satisfait l'équation différentielle $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} = g$.

Dans ce chapitre nous construisons au moyen du théorème 8 une solution de $\bar{\partial}\alpha = \beta$ sur un domaine strictement pseudo-convexe au moyen d'une intégrale de la même forme.

§ 7. Solution de l'équation

1. $G, G_\nu, \varphi, W, \Omega_{nq}, A_{nq}$ sont définis comme dans le chapitre précédent. Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{0,q+1}(G)$ bornée sur G pour la norme définie au § 1.5.

Nous posons

$$\gamma_\nu(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G_\nu} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta_\nu(y) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y),$$

$\nu \in \mathbf{N}, 0 \leqq q \leqq n - 1$.

Notons qu'on ne peut a priori remplacer G_ν par G car β n'est pas définie sur ∂G.

2. *Lemme 7.1.* La suite $\gamma_\nu(y)$ converge localement uniformément sur G ainsi que toutes ses dérivées vers

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y)$$

et $\qquad \gamma \in \mathscr{C}^\infty_{0,q}(G)$.

Ceci résulte du fait que β est bornée et du lemme 4.4.

3. Nous nous occupons des propriétés correspondantes pour ζ_ν. Puisqu'on peut différentier sous le signe intégrale à un ordre quelconque, il vient aussitôt:

Lemme 7.2. Les formes ζ_ν sont indéfiniment différentiables sur G_ν. Le lemme 7.3 n'est pas tout aussi trivial.

Lemme 7.3. La suite ζ_ν converge avec toutes ses dérivées localement uniformément sur G.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $G' \subset\subset G_{\nu_0}$ et $\mu > \nu > \nu_0$.

$$\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y) = (-1)^{q+1} \int_{\partial G_\mu - \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}$$

$$= (-1)^{q+1} \int_{\partial(G_\mu \setminus G_\nu)} \beta(x) \wedge A_{nq}$$

$$= (-1)^{q+1} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} d_x (\beta(x) \wedge A_{nq})$$
$$= (-1)^{2[q+1]} \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{nq}(x, y),$$

à cause de $\bar{\partial}\beta = 0$.

Maintenant d'après la construction de $g(x, y)$, la forme $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ pour $x \in G \backslash G_{\nu o}$ et $y \in G'$ est bornée, donc avec une constante convenable

$$|\zeta_\mu(y) - \zeta_\nu(y)| \leqq K \int_{G_\mu \setminus G_\nu} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (dx'_\lambda \wedge dx''_\lambda).$$

Cela montre la convergence uniforme sur G' de la suite ζ_ν. Par différentiation de $\bar{\partial}_x A_{nq}(x, y)$ sous le signe intégral par rapport à y, on constate la convergence uniforme locale de toutes les dérivées de $\zeta_\nu(y)$.

4. Nous posons maintenant

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_\nu(y), \quad \zeta \in \mathscr{C}^\infty_{(o,q)}(G).$$

Nous formulons alors le résultat de ce chapitre.

Théorème 9.

Soit $\beta \in \mathscr{C}^\infty_{o,\, q+1}(G)$, *telle que* β *est bornée sur* G *et* $\bar{\partial}\beta = 0$. *Alors la* $(0, q)$*-forme* $\alpha = \gamma + \zeta$ *satisfait à* $\bar{\partial}\alpha = \beta$, *où l'on rappelle*

$$\gamma(y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y),$$

$$\zeta(y) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(-1)^{q+1}}{(2\pi i)^n} \int_{x \in \partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{nq}(x, y).$$

Démonstration. A cause de la pseudo-convexité de G, il existe $\eta \in \mathscr{C}^\infty_{o\, q}(G)$ telle que $\bar{\partial}\eta = \beta$; η n'a pas besoin d'être borné mais possède d'après le théorème 8 la représentation

$$\eta(y) = \zeta_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{1}{(2\pi i)^n} \left[\int_{x \in \partial G_\nu} \eta(x)\, \Omega_{nq}(x, y) + \bar{\partial}_y \Gamma(y) \right]$$

pour $y \in G_{\nu o}$ et $\nu > \nu_o$.

De là il s'ensuit

$$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y).$$

Faisons dans cette équation $\nu \to \infty$; ainsi, pour $y \in G_{\nu o}$,

$$\bar{\partial}\zeta_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y) \to \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\gamma(y),$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.1. Le raisonnement vaut pour tout ν_o, donc $\forall y \in G$, $\bar{\partial}\alpha = \beta$.

Chapitre IV

ÉVALUATION POUR LA NORME UNIFORME

§ 8

1. Rappelons que la norme uniforme a été définie au § 1.5 pour des éléments de $\mathscr{B}\mathscr{C}^{\infty}_{oq}(G)$; on obtient

$$\forall y \in G, \ |\alpha(y)| = \sup_{|x_1| \leq 1 \ldots |x_q| \leq 1} \alpha(y)[x_1, \ldots, x, q],$$

$$|\alpha| = \sup_{y \in G} |\alpha(y)|.$$

Le but de ce chapitre est de prouver, avec les notations du chapitre précédent: si $\bar{\partial}\beta = 0$, $\exists \alpha, K > 0$ tels que $\bar{\partial}\alpha = \beta$ et $|\alpha| \leqq K|\beta|$.

2. *Majoration de γ*

On avait $\quad \gamma(y) = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \beta(x) \wedge B_{nq}(x, y).$

On en tire $\quad |\gamma(y)| \leqq \dfrac{|\beta|}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{x \in G} \frac{K_1}{|x-y|^{2n-1}} \bigwedge_{\lambda=1}^{n} (d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda).$

Soit S la sphère de rayon R = (diamètre G) et centrée en 0.

$$|\gamma(y)| \leqq \frac{K_1 |\beta|}{(2\pi)^n} \int_S \bigwedge_{\lambda=1}^{n} \frac{(d\bar{z}_\lambda \, dz_\lambda)}{|z|^{2n-1}} \leqq K|\beta|,$$

où K est indépendant de y, d'où $|\gamma| \leqq K|\beta|$.

La majoration de ζ est beaucoup plus difficile à obtenir; nous aurons d'abord besoin de certaines évaluations sur la fonction g du théorème 5.