Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CAUCHY RIEMANN SUR UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXE SOLUTIONS BORNÉES

Autor: Jambon, M.

Kapitel: §4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45380

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

On supposera désormais que $\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x}-\bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, $\bar{u}^*$ désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire

$$u^* : h \to \langle h \,.\, u \rangle \,.$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0,q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathscr{C}^{\infty}_{(n,\, n-q-1;\, 0,q)}(W) \,.$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}$, $0 \leq q \leq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q)\, \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q\, \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

Démonstration. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q,r+1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) = 0 \quad \text{avec} \quad q + r + 1 = n \,.$$

$$\bar{\partial}_x D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= q\,(-1)^q D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$

$$\bar{\partial}_y D_{1,q-1,r+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= (1+r)\,(-1)^{q-1} D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \quad \sum [(\bar{x}_k - \bar{y}_k)\, dx_k \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \bigwedge_{\mu=1}^{n-q-1} (d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu})] \, | x - y |^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-q-1} \leq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \ldots i_q, j_1 \ldots j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$ avec une frontière ∂G de classe $\mathscr{C}^1$. On prend l'orientation naturelle de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire $x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n''$ avec $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^{2n}$ orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,q+1}(G)$, γ bornée sur G. Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^{\infty}_{(0,q)}(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$| B_{nq}(x, y) | = 0\left(\frac{1}{| x - y |} 2n - 1\right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_o \in G$; soit f fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $0 \leq f \leq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_o, f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)]\, \gamma(x)\, B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x)\, \gamma(c)\, B_{nq}(x, y).$$

Le premier terme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_o) sur un domaine où le dénominateur ne s'annulle pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_o

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_o} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \ldots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_o dans G.

3. Théorème 4.

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{oq}(\bar{G})$. Alors pour chaque $y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \Big[\int_{x \in \partial G} \gamma(c) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \Big].$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1$, $q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n,(q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n,q-1} = B_{n,-1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{x \in G \mid |x - y| \leqq \varepsilon\} \subset\subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(c) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y)$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0\left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}}\right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_k \, d\, t_k \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} (d\, \bar{t}_\lambda \wedge d\, t_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i\, t''_\lambda$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y)$$

$$= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda,$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k\, dt'_k + t''_k\, dt''_k) = -\sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda\, dt'_\lambda + t''_\lambda\, dt''_\lambda \quad \text{sur} \quad |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} (-t''_k\, dt'_k + t'_k\, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 1}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

$= \text{aire de la sphère de rayon 1 en dimension } 2n = \dfrac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_o \in G$; nous choisissons une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $0 \leqq f \leqq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_o.

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\,\gamma(x) + f\gamma(x)$.
La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)$ γ donne le théorème pour $(1-f)\,\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.
On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x)\, dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \qquad \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\Pi i)^n}\Big[-\int_{x\in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x,y) - \bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma(x)\, dx_I \wedge B_{nq-1}(x,y)\Big].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n,q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) = \int_{x\in G} \sum_h \frac{\partial \gamma_I}{\partial \bar{x}_k}\, d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I\, B_{nq-1}(x,y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x,y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) \\
&= \int_{x\in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{y}_{i\nu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} (d\bar{y}_{i\lambda} \wedge dx_{i\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} \\
&= (n-1)! \Bigg[\int_{x\in G} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{i\nu}}\, d\bar{x}_{i\nu} \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda\Bigg] \wedge d\bar{y}_I.
\end{aligned}$$

On rappelle $I = (i_1, \dots i_\nu, \dots, i_q)$, $i_1 < \dots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \dots j_\mu, \dots, j_{n-q})$, $j_1 < \dots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j\lambda} \wedge dx_{j\lambda})$$

$$= (n-1)!\left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu}(\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})\right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda=j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda)\right] d\bar{y}_I .$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I ,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\varphi(x)[h.k] = d\{d\varphi(x)[h]\}[k] .$$