Chapitre Premier FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Chapitre Premier

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ

§ 2. Forme différentielle de Cauchy-Fantappiè

Sur un ouvert W de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, soit f^* un n-uplet de formes de $\mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$, $f^* = \{f^*_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$.

Pour chaque ν on définit $f_\nu(x, y) = f^*_\nu(x, y)\,[x-y]$ et on suppose que chaque fonction $f_\nu(x, y)$ ainsi définie ne s'annulle pas sur W.

Définition 1.

$$D_q(f^*) = \frac{f^*_1}{f_1} \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_2}{f_2}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*_q}{f_q}\right) \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_{1+q}}{f_q}\right) \wedge \ldots \wedge \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*_n}{f_n}\right)$$

s'appelle la forme différentielle de Cauchy-Fantappiè (C.F. forme) d'ordre q sur W, associée à f^*.

Théorème 1. *$D_q(f^*)$ est indépendant de f^*_1.*

Démonstration. $D_q(f^*) \in \mathscr{C}^1_{(n,\,n-q;\,0,\,q-1)}(W)$. On va donc faire agir $D_q(f^*)$ sur $2n-1$ vecteurs et on mettra en évidence une simplification par $f^*_1\,[x-y]$.

On pose $X_\nu \in E$ pour $1 \leqq \nu \leqq 2\,n-q$,

$X_\nu \in F$ pour $2n-q+1 \leqq \nu \leqq 2n-1$,

avec les notations du § 1 (ici $E = F = \mathbf{C}^n$).

On note $\xi_\nu = y$ pour $2 \leqq \nu \leqq q$,

$\xi_\nu = x$ pour $q+1 \leqq \nu \leqq n$,

σ_{2n-1} est le groupe symétrique d'ordre $2n-1$.

$I = (i_{q+1}, \ldots, i_n)$ un arrangement à $(n-q)$ éléments de $\{1, \ldots, 2n-q\}$,

$J = (j_2, \ldots, j_q)$ une permutation à $(q-1)$ éléments de $\{2n-q+1, \ldots 2n-1\}$,

$K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $k_1 < \ldots < k_n$ un ensemble tel que $K \cap I = \{1, \ldots, 2\,n-q\}$, $K \cap I = \emptyset$.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*)\,[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$$
$$= \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq \nu \leq q \\ q+1 \leq \nu \leq n}} \underset{\substack{\sigma(2\nu)=j_\nu \\ \sigma(2\nu)=i_\nu}}{\varepsilon_\sigma} \frac{f_1^*[X_{\sigma(1)}]}{f_1^*[x-y]} \prod_{\nu=1}^{n} \bar{\partial}_{\xi\nu} \left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right](X_{\sigma(2\nu)})\,.$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n-**C**-linéaire alternée de $X_{k_1}, \ldots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \,\exists \nu$ avec $X_{\sigma(2\nu+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce ν on a

$$\bar{\partial}_{\xi_\nu}\left[\frac{f_\nu^*[X_{\sigma(2\nu+1)}]}{f_\nu^*[x-y]}\right] = 0\,.$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^*[x-y]}{f_1^*[x-y]} = 1\,.$$

Le théorème est démontré.

§ 3. Une formule d'homotopie

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq \nu \leq r$, soit $f_\nu^* \in \mathscr{C}^{k_\nu}_{(p_\nu, q_\nu;\, r_\nu, s_\nu)}(W)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}(f_1^*, \ldots, f_r^*) = (\overset{\alpha_1}{\wedge}\, f_1^*) \wedge \ldots \wedge (\overset{\alpha_r}{\wedge}\, f_r^*)\,.$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;\,0,0)}(W)$ avec $f(x,y) = f^*(x,y)\,[x-y]$ ne s'annulle pas sur W.

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_v^* sont égales.

Remarque. $D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f}\right)$

car
$$\bar{\partial}_y \frac{f^*}{f} = \bar{\partial}_y \left(\frac{1}{f}\right) \wedge f^* + \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^*.

Soit maintenant $g^* \in \mathscr{C}^2_{(1,0;0,0)}(W)$ vérifiant de plus $\bar{\partial}_y g^* = 0$.

On définit comme pour f^*, $g(x, y) = g^*(x, y)[x-y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geqq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$D_{1,q,r,s}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{r+q}\,\bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \frac{r}{r+q}\,\bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ \frac{r}{r+q}\,D_{1,q,r-1,s+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geqq 1$ et $r \geqq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^*/f$ et $G^* = g^*/g$.

D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différentiée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_c G^*)$$
$$- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$-\frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différentiée

$$\bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar\partial_x G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$- \ldots$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$= \bar\partial_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$-\frac{r}{q} \bar\partial_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$-\frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)$$
$$-\frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) .$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geqq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*) = -\bar\partial_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_x G^*) \\ + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar\partial_x F^*, \bar\partial_x G^*)\,.$$

Si $q \geqq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x G^*) = \bar\partial_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar\partial_y F^*, \bar\partial_x G^*)\,.$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar\partial_x(f^*/f))$ (par définition).

$$D_1(f^*) = -\bar\partial_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar\partial_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ -\bar\partial_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\right. \\ + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar\partial_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \ldots \\ -\bar\partial_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar\partial_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar\partial_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$+ D_{1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g}\right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $\quad D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$,

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^{r} D_{1,1,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geqq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geqq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que :

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^{r} a_k D_{1,1,q,r-k,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$C(f^*, g^*) =$$

$$\sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).

§ 4. La formule intégrale de Bochner-Martinelli généralisée

On supposera désormais que $\mathbf{C}^n$ est muni de sa structure d'espace Hilbertien.

1. Soit $W = \{ (x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mid x \neq y \}$; alors sur W la C.F. forme définie à partir de $(\bar{x}-\bar{y})^*$ (voir (1))

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \binom{n-1}{q} D_{q-1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$$

est bien définie.

(1) Notons que, $\forall u \in \mathbf{C}^n$, $\bar{u}^*$ désigne la forme $\mathbf{C}$-linéaire

$$u^* : h \to \langle h . u \rangle .$$

Définition 4. $B_{nq}(x, y)$ s'appelle le noyau de Bochner-Martinelli pour une $(0,q)$ forme (B.M. Kern)

$$B_{nq} \in \mathscr{C}^{\infty}_{(n,\ n-q-1;\ 0,q)}(W) .$$

Nous prolongeons la définition par $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$.

Lemme 4.2. $\bar{\partial}_x B_{nq} = (-1)^q \bar{\partial}_y B_{n,q-1}$, $0 \leqq q \leqq n$.

Ce lemme résulte de $(n-q)\, \bar{\partial}_x D_{q+1}(f^*) = -q\, \bar{\partial}_y D_q(f^*)$.

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons que d'après le théorème 1 (ou sa démonstration)

$$D_{q,r+1}\left(\bar{\partial}_y\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q + r + 1 = n .$$

$$\bar{\partial}_x D_{1,q,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= q(-1)^q D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$

$$\bar{\partial}_y D_{1,q-1,r+1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right)$$
$$= (1+r)(-1)^{q-1} D_{1,q-1,1,r}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f}\right).$$

On a utilisé les formules de dérivation et de commutation des § 1.3.3 et 1.4.3. En tenant compte des coefficients on obtient le lemme 4.2.

Lemme 4.3.

$$B_{nq}(x, y) = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} (n-1)! \quad \sum [(\bar{x}_k - \bar{y}_k)\, dx_k \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \bigwedge_{\mu=1}^{n-q-1} (d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu})] \mid x - y \mid^{-2n},$$

où la sommation est étendue aux indices vérifiant $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i_1 < \ldots < i_q \leqq n$, $1 \leqq j_1 < \ldots < j_{n-q-1} \leqq n$.

Il est clair que seuls les termes où $k, i_1, \ldots i_q, j_1 \ldots j_{n-q-1}$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$ ne sont pas nuls.

Démonstration. On développe l'expression de $D_{q+1}((\bar{x}-\bar{y})^*)$ donnée dans (§ 3.1 Remarque) en utilisant de plus les règles de commutation.

2. Soit maintenant G un domaine borné dans $\mathbf{C}^n$ avec une frontière ∂G de classe $\mathscr{C}^1$. On prend l'orientation naturelle de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire $x_1', x_1'', \ldots, x_n', x_n''$ avec $x_\nu = x'_\nu + ix''_\nu$ est un système de coordonnées de $\mathbf{R}^{2n}$ orienté positivement et sur ∂G on choisit l'orientation induite (celle du théorème de Stokes). Ainsi les signes sont déterminés pour l'intégration.

Lemme 4.4. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^{\infty}_{0,q+1}(G)$, γ bornée sur G. Alors

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y) \in \mathscr{C}^{\infty}_{(0,q)}(G)$$

Démonstration. D'abord l'intégrale a un sens car

$$\mid B_{nq}(x, y) \mid = 0 \left(\frac{1}{\mid x - y \mid} 2n - 1 \right)$$

d'après le lemme 4.3.

Montrons la différentiabilité pour $y_o \in G$; soit f fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $0 \leqq f \leqq 1$ partout, $f = 1$ dans un voisinage compact K_1 de y_o, f est à support compact K_2 avec $K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset G$.

$$\alpha(y) = \int_{x \in G} [1 - f(x)]\, \gamma(x)\, B_{nq}(x, y) + \int_{x \in G} f(x)\, \gamma(c)\, B_{nq}(x, y) \,.$$

Le premier terme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'intégration porte en réalité (pour y voisin de y_o) sur un domaine où le dénominateur ne s'annulle pas.

Pour le deuxième terme $\alpha_2(y)$ on effectue le changement de variable d'intégration $x = y + z$. Il vient pour y voisin de y_o

$$\alpha_2(y) = \sum \int_{z \in G - y_0} \gamma(y+z) f(y+z) \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2n}} dz_k \ldots$$

Sous cette forme la différentiabilité en y ne pose plus de problème car $\gamma(y+z)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le raisonnement vaut naturellement pour tout y_o dans G.

3. THÉORÈME 4.

Soit $\gamma \in \mathscr{C}^\infty_{oq}(\bar{G})$. *Alors pour chaque* $y \in G$

$$\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \Big[\int_{x \in \partial G} \gamma(c) \wedge B_{nq}(x, y) - \int_{x \in G} [\bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] - \bar{\partial}_y \int_{x \in G} \gamma(x) \wedge B_{nq-1}(x, y) \Big].$$

C'est la formule de Bochner-Martinelli généralisée, pour $n = 1$, $q = 0$, on retrouve la formule de Cauchy.

a) On a
$$\begin{aligned} d_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] &= \bar{\partial}_x[\gamma(x) \wedge B_{nq}(x, y)] \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + (-1)^q \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x B_{nq}(x, y) \\ &= [\bar{\partial}_x \gamma(x)] \wedge B_{nq}(x, y) + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n,(q-1)}(x, y), \end{aligned}$$

en appliquant le lemme 4.2 pour la dernière égalité.

b) Soit tout d'abord $q = 0$; γ est une fonction, et $B_{n,q-1} = B_{n,-1}$ disparaît.

Nous choisissons $y \in G$ et posons

$$K_\varepsilon = \{ x \in G \mid |x - y| \leqq \varepsilon \} \subset\subset G \quad \text{et} \quad G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$$

Nous appliquons le théorème de Stokes sur G_ε à la forme trouvée en a).

$$\begin{aligned} &\int_{x \in G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(c) \wedge B_{no}(x, y) \\ &\qquad = \int_{x \in \partial G_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) - \int_{x \in \partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) \end{aligned}$$

Dans cette égalité on fait $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de « volume » converge vers l'intégrale étendue à tout G et la première intégrale de « surface » ne change pas.

Pour la deuxième intégrale de « surface » on a

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{no}(x, y) = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y) + \gamma(y) \int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y).$$

La première intégrale du second membre tend vers 0 avec ε car

$$|[\gamma(x) - \gamma(y)] B_{no}(x, y)| = 0\left(\frac{1}{|x - y|^{2n-2}}\right).$$

Le deuxième terme est $\gamma(y)$ à un facteur numérique près, en effet on fait le changement $x - y = \varepsilon t$ dans l'expression de $B_{no}(x, y)$ donnée par le lemme 4.3.

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \bar{t}_k \, d t_k \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} (d \bar{t}_\lambda \wedge d t_\lambda).$$

En utilisant les coordonnées réelles $t_\lambda = t'_\lambda + i t''_\lambda$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y)$$

$$= (n-1)! \int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2i)^n}{2} (-t''_k \, dt'_k + t'_k \, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq k}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda,$$

où on a remarqué que les termes

$$(t'_k \, dt'_k + t''_k \, dt''_k) = - \sum_{\lambda \neq k} t'_\lambda \, dt'_\lambda + t''_\lambda \, dt''_\lambda \quad \text{sur} \quad |t| = 1$$

ont disparu dans le produit extérieur.

Mais on reconnaît

$$\int_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} (-t''_k \, dt'_k + t'_k \, dt''_k) \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq 1}}^{n} dt'_\lambda \wedge dt''_\lambda$$

$=$ aire de la sphère de rayon 1 en dimension $2n = \dfrac{2\Pi^n}{\Gamma(n)}$, d'où

$$\int_{x \in \partial K_\varepsilon} B_{no}(x, y) = (2\Pi i)^n,$$

En reportant cette valeur au début de b) on obtient le théorème 4 pour $q = 0$.

c) Soit maintenant q quelconque et $y_0 \in G$; nous choisissons une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $0 \leqq f \leqq 1$ dont le support est compact et contenu dans G et qui vaut 1 dans un voisinage K de y_0.

On décompose $\gamma(x) = (1-f)\,\gamma(x) + f\gamma(x)$.
La formule de Stokes appliquée à la différentielle trouvée en a) avec $(1-f)$ γ donne le théorème pour $(1-f)\,\gamma$.

d) On peut donc sans restreindre la généralité supposer maintenant que γ est à support compact.
On écrit conformément aux notations du paragraphe 1 (2.3)

$$\gamma(x) = \sum_I \gamma_I(x)\, dx_I$$

et on cherche à démontrer

$$(3.1) \qquad \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I = \frac{1}{(2\Pi i)^n}\Big[-\int_{x\in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x,y) - \bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma(x)\, dx_I \wedge B_{nq-1}(x,y)\Big].$$

Occupons-nous d'abord du deuxième terme (en $B_{n,q-1}$). On remarque au départ que

$$\bar{\partial}_y \int_{w\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y) = \int_{x\in G} \sum_h \frac{\partial\gamma_I}{\partial\bar{x}_k} d\bar{y}_k \wedge d\bar{x}_I\, B_{nq-1}(x,y),$$

en utilisant la technique de dérivation vue à la fin de la démonstration du lemme 4.4. On remplace alors $B_{nq-1}(x,y)$ par sa valeur explicite donnée au lemme 4.3.

$$\bar{\partial}_y \int_{x\in G} \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq-1}(x,y)$$
$$= \int_{x\in G} (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} (n-1)! \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial\gamma_I(x)}{\partial\bar{x}_{i\nu}} d\bar{y}_{i\nu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} (d\bar{y}_{i_\lambda} \wedge dx_{i_\lambda}) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{n-q} d\bar{x}_{j_\mu} \wedge dx_{j_\mu}$$
$$= (n-1)!\left[\int_{x\in G} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\partial\gamma_I(x)}{\partial\bar{x}_{i\nu}} d\bar{x}_{i\nu} \wedge (\bar{x}_{i\nu} - \bar{y}_{i\nu})\, dx_{i\nu} \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq\nu}}^{q} d\bar{x}_\lambda \wedge dx_\lambda\right] \wedge d\bar{y}_I.$$

On rappelle $I = (i_1, \dots i_\nu, \dots, i_q), i_1 < \dots < i_q$,
et on a posé $J = (j_1, \dots j_\mu, \dots, j_{n-q}), j_1 < \dots < j_{n-q}$,
de telle sorte que $I \cup J$ est une permutation de $(1, \dots, n)$.

Occupons-nous de la même façon du terme en $B_{nq}(x, y)$.

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x)\, d\bar{x}_I \wedge B_{nq}(x, y)$$

$$= (n-1)!\,(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge d\bar{x}_I \wedge (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu})$$

$$dx_{j\mu} \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{q} (d\bar{y}_{i\nu} \wedge dx_{i\nu}) \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \mu}}^{n-q} (d\bar{x}_{j\lambda} \wedge dx_{j\lambda})$$

$$= (n-1)! \left[\int_{x \in G} \sum_{\mu=1}^{n-q} \frac{\partial \gamma_I(x)}{\partial \bar{x}_{j\mu}} d\bar{x}_{j\mu} \wedge dx_{j\mu} (\bar{x}_{j\mu} - \bar{y}_{j\mu}) \right.$$

$$\left. \wedge \bigwedge_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda = j_\mu}}^{n} (dx_\lambda \wedge d\bar{x}_\lambda) \right] d\bar{y}_I .$$

On reconnaît dans la somme des deux intégrales en B_{nq} et B_{nq-1} intervenant dans (3.1)

$$\int_{x \in G} \bar{\partial}_x \gamma_I(x) \wedge B_{no}(x, y)\, d\bar{y}_I = -(2\Pi i)^n \gamma_I(y)\, d\bar{y}_I ,$$

d'après le théorème 4 démontré pour $q = 0$. On reporte dans (3.1) et on obtient exactement le résultat désiré.

Chapitre II

FORMES DE CAUCHY-FANTAPPIÈ SUR DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

Indiquons tout d'abord quelques notations: soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$; si φ est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, $d \otimes d\, \varphi(x)$ est la forme bilinéaire symétrique

$$d \otimes d\, \varphi(x)[h.k] = d\{ d\, \varphi(x)[h] \}[k] .$$