Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43865

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Reste à prouver (ii). L'inclusion $T^{-1}A \subset A_S$ est évidente, puisqu'on a déjà remarqué que t est une S-unité, donc que les $1/t^m$ $(m \geq 0)$ sont des S-entiers. Inversement, soit $y \in A_S$, et considérons le produit yt^m $(m \geq 0)$. En tout $\mathfrak{q} \notin D$, on a, d'après (i),

$$v_q(yt^m) = v_q(y) \geq 0.$$

En $\mathfrak{p}_j \in D$, on a, toujours d'après (i),

$$v_j(yt^m) = v_j(y) + mv_j(t) \geq v_j(y) + m.$$

Choisissons pour m une valeur $\geq \sup_j |v_j(y)|$ et posons $x = yt^m$. Pour toute valuation discrète normalisée v de K, on a alors $v(x) \geq 0$: donc $x \in A$, $y = x/t^m \in T^{-1}A$, et finalement $A_S \subset T^{-1}A$, ce qui achève de démontrer (ii), et la proposition.

3. Démonstration du théorème (3)

Nous noterons $z_1, z_2, \ldots, z_s$ les coordonnées dans l'espace $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{r+1} \times \mathbf{R}^d$.

La démonstration se décomposera en quatre parties:

(a) *L'homomorphisme* Λ *a pour noyau* W.

En effet, si $x \in U_S$, l'égalité $\Lambda(x) = 0$ implique d'abord

$$|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1,$$

ce qui signifie que x est non seulement une S-unité, mais une unité de A; $\Lambda(x) = 0$ implique d'autre part $|x|_1 = \ldots = |x|_a = 1$, ce qui montre que cette unité x appartient au noyau de L, donc à W (théorème (1)); inversement, il est clair que $x \in W$ implique $\Lambda(x) = 0$. D'où (a).

(b) $\Lambda(U_S)$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{R}^s$.

Les valeurs absolues $|.|_{a+1}, \ldots, |.|_s$ provenant de valuations discrètes, il est clair qu'on peut trouver dans $\mathbf{R}^d$ un voisinage V' de l'origine tel que la condition

$$(\log|x|_{a+1}, \ldots, \log|x|_s) \in V'$$

implique $|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1$, ce qui signifie (si $x \in U_S$) que x est en fait une unité de A. Soit alors V un voisinage *borné* de 0 dans $\mathbf{R}^a$: la double condition

$$x \in U_S \text{ et } \Lambda(x) \in V \times V'$$

peut s'écrire

$$x \in U \text{ et } L(x) \in V,$$

et d'après le théorème (1), ceci n'est possible que pour un nombre fini de x. D'où (b).

(c) $\Lambda(U_S)$ *est contenu dans l'hyperplan* $z_1 + z_2 + \ldots + z_s = 0$.

Supposons en effet $x \in U_S$ et décomposons l'idéal xA en facteurs premiers (dans A):

$$xA = \prod_{1 \leq j \leq d} \mathfrak{p}_j^{\nu_j(x)}.$$

Egalons les normes absolues des deux membres:

$$|Nx| = \prod_{1 \leq j \leq d} (N\mathfrak{p}_j)^{\nu_j(x)}.$$

Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les plongements $K \to \mathbf{C}$ indexés de telle manière que $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ soient les plongements réels, et que, pour $1 \leq k \leq r_2$, σ_{r_1+k} et $\sigma_{r_1+r_2+k}$ soient complexes conjugués, la formule ci-dessus devient

$$\prod_{1 \leq i \leq r_1} |\sigma_i x| \cdot \prod_{r_1+1 \leq i \leq a} |\sigma_i x|^2 \cdot \prod_{1 \leq j \leq d} (N\mathfrak{p}_j)^{-\nu_j(x)} = 1,$$

soit, compte tenu de la définition des valeurs absolues normalisées:

$$\prod_{1 \leq i \leq s} |x|_i = 1.$$

(c) résulte de là, en prenant les logarithmes. Notons que nous venons en fait de redémontrer la formule du produit.

(d) $\Lambda(U_S)$ *contient un réseau de rang* $s - 1$.

C'est en principe la partie difficile: en réalité, tout le travail a été fait dans le théorème (1). Soit en effet $u_1, u_2, \ldots, u_r$ (rappel: $r = a-1 = r_1+r_2-1$) un système fondamental d'unités de K (nous utilisons le théorème (1)) et considérons le sous-groupe G de U_S engendré par $u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_d$. $\Lambda(G)$ est un sous-groupe de $\Lambda(U_S)$ (donc un réseau de $\mathbf{R}^s$), et il est engendré par $\Lambda(u_1), \ldots, \Lambda(u_r), \Lambda(x_1), \ldots, \Lambda(x_d)$. La matrice de ces $r + d = s - 1$ vecteurs dans la base canonique de $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d$ s'écrit

$$\begin{array}{c} \mathbf{R}^a \\ \\ \mathbf{R}^d \end{array} \left\{ \begin{array}{c|cccccc} M & & & X & & & \\ \hline & \lambda_1 & & & & & \\ & & \lambda_2 & & & & \\ 0 & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \lambda_d \end{array} \right\}$$

M désignant la matrice de $L(u_1), \ldots, L(u_r)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^a$, et les λ_j désignant les quantités $\log |x_j|_j$. Par construction des x_j, on a $\lambda_1 \neq 0, \ldots \lambda_d \neq 0$; d'après le théorème (1), M est de rang $r = a - 1$: la matrice ci-dessus est donc de rang $r + d = s - 1$, et aussi le groupe $\Lambda(G)$, ce qui prouve (d).

(b), (c) et (d) montrent que $\Lambda(U_S)$ est un réseau de rang exactement $s - 1$, et le théorème (3) est démontré.

4. Démonstration du théorème 4

La partie (v) de la proposition 1 du §2 montre que l'application $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}A_S$ définit un homomorphisme surjectif φ du groupe des idéaux de A sur le groupe des idéaux de A_S; comme φ transforme évidemment tout idéal principal en un idéal principal, φ donne lieu par passage au quotient à un homomorphisme surjectif du groupe des classes d'idéaux de A sur le groupe des classes d'idéaux de A_S; comme le premier groupe est fini, d'ordre h (théorème (2)), le second est lui aussi fini, d'ordre h_S diviseur de h, d'où la première assertion du théorème (4).

Le même raisonnement prouve d'ailleurs plus généralement que si $S \subset S'$, alors $h_{S'}$ divise h_S: pour achever de démontrer le théorème (4), il suffit donc de prouver ceci: *il existe un ensemble S tel que $h_S = 1$.*

Or, soient $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ des idéaux entiers de A représentant les h classes d'idéaux de A, et soit $D = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_d\}$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui divisent l'un au moins des $\mathfrak{a}_i$; enfin, soit S l'ensemble formé des places archimédiennes de K et des places discrètes appartenant à D; alors, $h_S = 1$: en effet, soit $\mathfrak{b}$ un idéal entier de A_S; il existe un idéal entier $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}A_S$ (prop. 1, (v)); d'autre part, il existe $y \in K^*$ et i tels que $\mathfrak{a} = y\mathfrak{a}_i$; enfin, $\mathfrak{a}_i$ se décompose en produit de facteurs premiers appartenant tous à D:

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}_1^{m_1} \mathfrak{p}_2^{m_2} \ldots \mathfrak{p}_d^{m_d}.$$

D'où immédiatement (prop. 1, (iv))

$$\mathfrak{b} = yA_S;$$

$\mathfrak{b}$, idéal entier quelconque de A_S, est principal, et $h_S = 1$. Le théorème (4) est entièrement démontré.

Notons qu'il suffit, dans la démonstration ci-dessus, de prendre pour D une famille finie d'idéaux premiers dont les classes forment un système générateur du groupe des classes de A. Dans la pratique, il est facile de