ECKENKRÜMMUNG BELIEBIGER KOMPAKTER EUKLIDISCHER POLYEDER UND CHARAKTERISTIK VON EULER-POINCARÉ

ECKENKRÜMMUNG BELIEBIGER KOMPAKTER EUKLIDISCHER POLYEDER UND CHARAKTERISTIK VON EULER-POINCARÉ

H. HADWIGER

Jean Karamata zum Gedächnis

Es ist eine allgemein bekannte Tatsache, dass die Eulersche Charakteristik $\chi(A)$ eines ausreichend „vernünftig" berandeten Polyeders A des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n vermöge der einfachen Formel

$$\text{(I)} \qquad T(A) = \Omega_n \chi(A)$$

mit der Eckenkrümmung (Totalkrümmung) $T(A)$ von A in Beziehung tritt. Hierbei bezeichnet Ω_n den $(n-1)$-dimensionalen Inhalt der euklidischen Einheitssphäre $S \subset E^n$ (Oberfläche der Einheitskugel im E^n), und die Eckenkrümmung

$$\text{(II)} \qquad T(A) = \sum \alpha(A; p)$$

ist die Summe der Aussenwinkel $\alpha = \alpha(A; p)$, die dem Polyeder A in den Eckpunkten p zugeordnet sind. Wenn sich die Randfläche von A, wie bereits oben vermerkt, in allen Eckpunkten hinreichend normal verhält, so können die Aussenwinkel als vorzeichenbegabte $(n-1)$-dimensionale sphärische Winkelgrössen, die den Innenwinkeln polar zugeordnet sind, so erklärt werden, dass das polyedrische Analogon (I) zur bekannten Gauss-Bonnetschen Formel gültig ist. In der vorliegenden Fachliteratur sind allerdings explizite Ausführungen vornehmlich im Falle $n = 3$ vorhanden; vgl. hierzu [1], insb. S. 90–91.

Die in den „vernünftigen" Fällen mögliche elementargeometrische Erklärung dienlicher Polarwinkel versagt, wenn beliebige kompakte polyedrische Punktmengen A zugelassen werden. Hier fällt einmal der Begriff der Randfläche im herkömmlichen Sinne im allgemeinen weg und es können singuläre Eckpunkte auftreten, wo polyedrische Teilsegmente von A verschiedenster Dimension aneinanderstossen.

Das Ziel der vorliegenden Note ist es nun, eine Definition der Polarwinkel $\alpha = \alpha(A, p)$ für die Eckpunkte p beliebiger kompakter Polyeder A

so zu geben, dass in den normalen Fällen die bis anhin betrachteten Aussenwinkel erneut geliefert werden und dass im vorgesehenen allgemeinen Geltungsrahmen das Bestehen der Formel (I) gewährleistet ist.

Es ist selbstverständlich, dass zur Erklärung der Polarwinkel $\alpha(A, p)$ lediglich die infinitesimale Nachbarschaft des Polyeders A im Eckpunkt p herangezogen wird. Mit der so erreichten Verifikation von (I) ist damit der Nachweis erbracht, dass die Charakteristik $\chi(A)$ eines beliebigen kompakten Polyeders A durch das lokale Verhalten in den Umgebungen ihrer Eckpunkte allein eindeutig bestimmt ist.

Unsere Ausführungen stützen sich darauf, dass die Eulersche Charakteristik für die kompakten Punktmengen des „Konvexrings" des m-dimensionalen euklidischen und sphärischen Raumes auf elementare Weise begründbar ist, und dass auch alle hier einschlägigen Eigenschaften im nämlichen Rahmen nachgewiesen werden können. Vgl. hierzu [2], insb. S. 102–105.

1. In diesem ersten Abschnitt geben wir eine Definition des Polarwinkels $\alpha = \alpha(A; p)$ in einem beliebigen Punkt $p \in E^n$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n, $n \geqslant 1$, bezüglich einer kompakten polyedrischen Punktmenge $A \subset E^n$. Es sei hier vermerkt, dass A definitionsgemäss die Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter und konvexer Punktmengen ist.

Es sei $z \in E^n$ ein fest gewählter Ursprung. Punkte im Raum und ihre Ortvektoren bezüglich z sollen auf die nämliche Weise bezeichnet werden. Ferner bedeute $S \subset E^n$ die $(n-1)$-dimensionale euklidische Einheitssphäre um den Ursprung z und Ω_n bezeichne ihren $(n-1)$-dimensionalen Inhalt. Nachfolgend finden Einheitsvektoren $u, v \in S$ Verwendung, wobei uv ihr Skalarprodukt anzeigen soll.

Ist $p \in E^n$ ein beliebig gewählter Punkt und ρ, $0 < \rho < \infty$, eine positive relle Zahl, so sei dem Punkt p die der Richtung u assoziierte Hemisphäre

1.1 $$H_\rho(p, u) = \{ x \in E^n \mid x = p + \rho v, \quad uv \geqslant 0 \}$$

zugeordnet. Der Polarwinkel α in p bezüglich A wird nun durch den Ansatz

1.2 $$\alpha(A; p) = \Omega_n \chi(p \cap A) - \lim_{\rho \to 0} {}^S\!\int \chi[H_\rho(p, u) \cap A] \, du$$

gegeben, wobei sich die Integration über alle Raumrichtungen u erstrecken soll; du bezeichnet die Richtungsdichte, also das $(n-1)$-dimensionale Flächendifferential auf S. Im Falle $n = 1$ ist die dem Entartungsfall adäquate naheliegende Umdeutung vorzukehren.

Im Hinblick auf die additive Eigenschaft der Eulerschen Charakteristik, wonach für zwei Mengen U und V des euklidischen oder sphärischen Konvexrings

1.3 $$\chi(U) + \chi(V) = \chi(U \cup V) + \chi(U \cap V)$$

gilt, resultiert nach 1.2 unmittelbar das für zwei beliebige Polyeder A, $B \subset E^n$ gültige Additionstheorem

1.4 $$\alpha(A; p) + \alpha(B; p) = \alpha(A \cup B; p) + \alpha(A \cap B; p).$$

2. Nachfolgend stellen wir fest, dass der mit Ansatz 1.2 erklärte Polarwinkel α fast immer verschwindet und lediglich füt Eckpunkte von A von Null verschieden ausfallen kann. Um das Verschwinden des Polarwinkels für Nichteckpunkte nachweisen zu können, muss zunächst genauer festgelegt werden, was unter einem Eckpunkt einer beliebigen kompakten polyederischen Punktmenge zu verstehen ist. Ein Punkt $p \in A$ soll Eckpunkt von A heissen, wenn die folgende Sachlage besteht:

Ist $A = \cup P_i$ irgend eine Darstellung von A als Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter und konvexer Punktmengen und ist $D = \cap Q_j$ der Durchschnitt aller P_i, die p enthalten (sie sind mit Q_j bezeichnet), so ist p ein extremer Randpunkt (Ecke) der konvexen nichtleeren Menge D. Vgl. zu diesem Begriff [3], insb. S. 15.

Es bezeichne jetzt A_e, A_r, A_i, A_a die Menge der Eckpunkte, der Randpunkte, der inneren Punkte, der äusseren Punkte von A. Wir zeigen, dass die Aussage

2.1 $$p \notin A_e \Rightarrow \alpha(A; p) = 0$$

richtig ist. In der Tat: Zunächst ist aus 1.2 direkt ablesbar, dass sowohl für $p \in A_a$ als auch für $p \in A_i$ sicher $\alpha(A; p) = 0$ ist. Es sei nun $p \in A_r$, aber $p \notin A_e$. Nach der Eckpunktserklärung existiert eine Darstellung $A = \cup P_i$ derart, dass p nicht extremer Randpunkt von $D = \cap Q_j$ ist. Es gibt dann zwei Punkte $p_0, p_1 \in D$, $p_0 \neq p_1$ so, dass $p = (p_0 + p_1)/2$ ist. Es sei nun $\rho > 0$ so klein gewählt, dass die Abstandsbedingung $d(p, P_i) > \rho$ für alle P_i, die p nicht enthalten, erfüllt ist und dass weiter noch $|p_0 - p| = |p_1 - p| > \rho$ ausfällt.

Abgesehen von eventuellen Richtungsmengen vom Masse Null gilt dann $\chi[H_\rho(p, u) \cap A] = 1$, weil $H_\rho(p, u) \cap A$ fast immer die Vereinigungsmenge endlich vieler abgeschlossener und sphärischkonvexer Punktmengen mit nichtleerem gemeinsamen Durchschnitt ist. Aus 1.2 wird nun $\alpha(A; p) = 0$ ablesbar.

Weiterhin ist die folgende Feststellung wichtig: Ist A ein kompaktes und konvexes m-dimensionales Polytop, $0 \leqslant m \leqslant n$, und ist $p \in A$ ein Eckpunkt von A, so gilt

2.2 $$\alpha(A; p) = \alpha^0(A; p),$$

wo nun α^0 der dem Innenwinkel von A bei p polar zugeordnete Aussenwinkel (Normalensektor) ist; vgl. hierüber [3], S. 14. Dies ergibt sich mühelos aus der Bemerkung, dass für ausreichend kleine $\rho > 0$ die Beziehung $\chi\,[H_\rho(p, u) \cap A] = 0$ bzw. $= 1$ gilt, wenn u dem offenen Kern des Stützrichtungskegels von A in p bzw. der zu ihr komplementären abgeschlossenen Richtungsmenge angehört.

3. Nun können wir die Totalkrümmung $T(A)$ des Polyeders durch

3.1 $$T(A) = \sum \alpha(A; p)$$

definieren, wobei sich die Summation formal über sämtliche Punkte $p \in E^n$ erstreckt. Mit Rückblick auf 2.1 gewahrt man, dass sich diese lediglich über die Eckpunktsmenge A_e von A de facto erstreckt. Wie aus der Eckpunktserklärung leicht zu entnehmen ist, ist aber A_e eine endliche Menge, sodass sich 3.1 letzten Endes auf eine endliche Summe von Polarwinkeln reduziert.

Mit 1.4 schliesst man jetzt auf die Gültigkeit der additiven Beziehung

3.2 $$T(A) + T(B) = T(A \cup B) + T(A \cap B).$$

Weiter folgt aus 2.2 unmittelbar

3.3 $$T(P) = \Omega_n; \qquad P \neq \phi, \qquad P \text{ konvex},$$

und schliesslich sei die triviale Feststellung

3.4 $$T(\phi) = 0$$

angefügt. Gerade aber diese drei Eigenschaften 3.2 bis 3.4 kennzeichnen im wesentlichen (bis auf den Normierungsfaktor) die Charakteristik von Euler-Poincaré. Vgl. hierüber [2], S. 103 ff.

Zusammengefasst resultiert jetzt

3.5 $$T(A) = \Omega_n \chi(A),$$

wodurch die Gültigkeit des polyedrischen Analogons (I) zur Gauss-Bonnetschen Formel für beliebige kompakte Polyeder des E^n nachgewiesen ist.

LITERATUR

[1] Blaschke, W. *Vorlesungen über Integralgeometrie.* Dritte Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.

[2] Hadwiger, H., Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine-angew. Math.*, *194*, 101-110 (1955).

[3] Bonnesen, T. und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, *3*, 1-172 (1934).

(Reçu le 1er mai 1968)

H. Hadwiger
Mathematisches Institut
der Universität Bern
CH 3012 Bern, Sidlerstr. 5

vide-leer-empty