§2. Analytic pull-back

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Definition 3 : Let X', X be analytic spaces, Y a closed analytic subspace of X defined by J, and $f = (f_0, f^1) : X' \to X$ a morphism.

The inverse image of Y by f, $f^{-1}(Y)$, is the analytic subspace Y' of X' defined by the ideal $J' = f^1(J)\,\mathcal{O}_{X'}$.

The inverse image of a simple point x in X is called the f-fiber over x, and is denoted by $f^{-1}(x)$ or $X'(x)$.

Proposition 1 : If $f = (f_0, f^1) : X' \to X$ is a morphism of analytic spaces, and Y is a subspace of X, then $f^{-1}(Y) \simeq Y \underset{X}{\times} X'$.

Proof : Let T be any analytic space, and $g : T \to X'$ a morphism. Then g can be considered as a morphism from T to $f^{-1}(Y)$ if and only if $f \circ g$ can be considered as a morphism from T to Y. Thus $f^{-1}(Y)$ and $X' \underset{X}{\times} X$ are solutions of the same universal problem.

§ 2. *Analytic pull-back*

In the following we want to generalize the notion of inverse image of a subspace.

We shall first recall the basic properties of the tensor product $E \underset{A}{\otimes} F$, where A is a commutative ring and E, F are two A-modules.

(1°) $E \otimes A^n = E^n$ $(n \in N)$

(2°) If the sequence of A-modules $F' \to F \to F'' \to 0$ is exact, then also the sequence $E \otimes F' \to E \otimes F \to E \otimes F'' \to 0$ is exact. (Right exactness of the tensor product)

(3°) If $(F_i)_{i \in I}$; $f_{ij} : F_j \to F_i$ is an inductive system, then

$$E \otimes \varinjlim F_i = \varinjlim (E \otimes F_i).$$

On the other hand these properties characterize completely the functor $\otimes$.

Definition 1 : Let $f = (f_0\ f^1) : X' \to X$ be a morphism of analytic spaces, and $\mathcal{E}$ an $\mathcal{O}_X$-module. Then $f_0^*\mathcal{E}$ is an $f_0^*\,\mathcal{O}_X$-module and $\mathcal{O}_{X'}$ is also an $f_0^*\,\mathcal{O}_X$-module (by $f^1 : f_0^*\,\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$).

The analytic pull-back $f^*\mathcal{E}$ of $\mathcal{E}$ by f is defined by scalar extension:

$$f^*\mathcal{E} = f_0^*\mathcal{E} \underset{f_0^*\,\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X'}$$

Remark: The inverse image is a particular case of the analytic pull-back.

In fact, if Y is a closed analytic subspace of X and $f : X' \to X$ is a morphism:

$$f^* \mathcal{O}_Y = f_0^*(\mathcal{O}_X/J_Y) \underset{f_0^* \mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X'} \simeq f_0^* \mathcal{O}_X / f_0^* J_Y \underset{f_0^* \mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X'}$$

$$\simeq \mathcal{O}_{X'}/f^1(J_Y).\, \mathcal{O}_{X'} \simeq \mathcal{O}_{f^{-1}(Y)}$$

(The third isomorphism follows from the fact, that $A/I \underset{A}{\otimes} E \simeq E/IE$).

Elementary properties of the analytic pull-back:

(*a*) $(f^* \mathcal{E})_{x'} = (f_0^* \mathcal{E})_{x'} \otimes_{(f_0^* \mathcal{O}_X)_{x'}} \mathcal{O}_{X',x'} \simeq \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X',x'}$ where $x = f_0(x')$ (since $\otimes$ commutes with inductive limits).

(*b*) $f^*(\mathcal{E} \underset{\mathcal{O}X}{\otimes} \mathcal{F}) = f^* \mathcal{E} \underset{\mathcal{O}X'}{\otimes} f^* \mathcal{F}$, where $\mathcal{E}$ and $\mathcal{F}$ are $\mathcal{O}_X$-modules.

(*c*) If $\mathcal{E}$ is a coherent $\mathcal{O}_X$-module, then $f^* \mathcal{E}$ is a coherent $\mathcal{O}_{X'}$-module.

In fact, $\mathcal{E}$ has a locally finite presentation: $\mathcal{O}_X^q \to \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{E} \to 0$, and f^* is compatible with cokernels, $f^*(\mathcal{O}_X^r) = \mathcal{O}_X^r$.

Special case: The pull-back of vector bundle. Let (E, π) be an analytic vector bundle over the analytic space X, and $f: X' \to X$ a morphism of analytic spaces. The fiber product carries a unique structure of vector bundle over X', such that $\bar{f}$ is a bundle morphism. We call this bundle E'.

$$\begin{array}{ccc} E \times_X X' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Proposition 1: Let $\mathcal{E}$ (Resp. $\mathcal{E}'$) be the sheaf of analytic sections of E (Resp. E'). Then $\mathcal{E}' = f^* \mathcal{E}$.

Proof (Sketch): We have a $f_0^* \mathcal{O}_X$ linear morphism $f_0^* \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, which extends to a morphism $f^* \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. We can prove that this is an isomorphism. Since the question is local with respect to X', we can suppose that E is a trivial bundle over X with fiber $\mathbf{C}^r$, then $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^r$. Also $\mathcal{O}_{X'}^r = f^* \mathcal{O}_X^r$. Therefore $f^* \mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

§ 3. *Introduction to flatness by examples*

Let S be an analytic space. By analytic space over s we mean an analytic space X provided with a morphism $\pi : X \to S$. Let S be a simple point in S, and consider $X(s) = f^{-1}(s)$.