

# §1. Analytic subspaces of an analytic space

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# FLATNESS AND PRIVILEGE

by A. DOUADY

## I. FLAT MORPHISMS

### § 1. *Analytic subspaces of an analytic space*

Let  $Y_1$  and  $Y_2$  be closed analytic subspaces of an analytic space  $X$ , and let them be defined by the  $\mathcal{O}_X$  ideals  $J_1, J_2$ .

*Definition 1:* We say that  $Y_1$  is *analytically included* in  $Y_2$ , and we write  $Y_1 \subset Y_2$ , when  $J_1 \supset J_2$ .

*Remark:* The analytic inclusion implies the set theoretic inclusion, but the converse is not true.

Example:  $X = (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ ;  $J_1 = (x)$ ,  $J_2 = (x^2)$ . The space  $Y_1$  is a simple point,  $Y_2$  is a double point,  $Y_1 \not\subset Y_2$ , while they have the same underlying set.

*Definition 2:* The subspace  $Y_1 \cup Y_2$  is the smallest subspace of  $X$  containing  $Y_1$  and  $Y_2$ , and it is defined by  $J_1 \cap J_2$ . The subspace  $Y_1 \cap Y_2$  is the biggest subspace of  $X$  contained in both  $Y_1$  and  $Y_2$ , and it is defined by  $J_1 + J_2$ .

*Remark:* The underlying set of  $Y_1 \cup Y_2$  (Resp.  $Y_1 \cap Y_2$ ) is the union (Resp. intersection) of the underlying sets of  $Y_1$  and  $Y_2$ . However  $\cup$  and  $\cap$  of analytic spaces do not satisfy the distributivity laws which hold in set-theory:  $(Y_1 \cup Y_2) \cap Y_3$  contains  $Y_1 \cap Y_3$  and  $Y_2 \cap Y_3$ , and therefore their union; similarly  $(Y_1 \cap Y_2) \cup Y_3 \subset (Y_1 \cup Y_3) \cap (Y_2 \cup Y_3)$ . In general the converse inclusions do not hold.

Example: Let  $X = \mathbb{C}^2$  and  $Y_1, Y_2, Z$  be given by ideals  $(x-y)$ ,  $(x+y)$  and  $(x)$  respectively.

$(Y_1 \cup Y_2) \cap Z$  is  $\{0\}$  provided with  $\mathbb{C}\{y\}/(y^2)$ , while  $(Y_1 \cap Y_2) \cup (Y_2 \cap Z)$  is the reduced space  $\{0\}$ . On the other hand:  $Y_1 \cap Y_2 \subset Z$ ,  $(Y_1 \cap Y_2) \cup Z = Z$ , while  $(Y_1 \cup Z) \cap (Y_2 \cup Z)$  is the space defined by the ideal  $(x^2, xy)$ . Its local ring at the origin is  $\mathbb{C}\{x, y\}/(x^2, xy)$  in which  $x$  is nilpotent.

*Definition 3 :* Let  $X', X$  be analytic spaces,  $Y$  a closed analytic subspace of  $X$  defined by  $J$ , and  $f = (f_0, f^1) : X' \rightarrow X$  a morphism.

The inverse image of  $Y$  by  $f, f^{-1}(Y)$ , is the analytic subspace  $Y'$  of  $X'$  defined by the ideal  $J' = f^1(J) \mathcal{O}_{X'}$ .

The inverse image of a simple point  $x$  in  $X$  is called the  $f$ -fiber over  $x$ , and is denoted by  $f^{-1}(x)$  or  $X'(x)$ .

*Proposition 1 :* If  $f = (f_0, f^1) : X' \rightarrow X$  is a morphism of analytic spaces, and  $Y$  is a subspace of  $X$ , then  $f^{-1}(Y) \simeq Y \times_X X'$ .

*Proof :* Let  $T$  be any analytic space, and  $g : T \rightarrow X'$  a morphism. Then  $g$  can be considered as a morphism from  $T$  to  $f^{-1}(Y)$  if and only if  $f \circ g$  can be considered as a morphism from  $T$  to  $Y$ . Thus  $f^{-1}(Y)$  and  $X' \times_X Y$  are solutions of the same universal problem.

## § 2. Analytic pull-back

In the following we want to generalize the notion of inverse image of a subspace.

We shall first recall the basic properties of the tensor product  $E \otimes_A F$ , where  $A$  is a commutative ring and  $E, F$  are two  $A$ -modules.

(1°)  $E \otimes A^n = E^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

(2°) If the sequence of  $A$ -modules  $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  is exact, then also the sequence  $E \otimes F' \rightarrow E \otimes F \rightarrow E \otimes F'' \rightarrow 0$  is exact. (Right exactness of the tensor product)

(3°) If  $(F_i)_{i \in I}; f_{ij} : F_j \rightarrow F_i$  is an inductive system, then

$$E \otimes \lim_{\rightarrow} F_i = \lim_{\rightarrow} (E \otimes F_i).$$

On the other hand these properties characterize completely the functor  $\otimes$ .

*Definition 1 :* Let  $f = (f_0, f^1) : X' \rightarrow X$  be a morphism of analytic spaces, and  $\mathcal{E}$  an  $\mathcal{O}_X$ -module. Then  $f_0^* \mathcal{E}$  is an  $f_0^* \mathcal{O}_X$ -module and  $\mathcal{O}_{X'}$  is also an  $f_0^* \mathcal{O}_X$ -module (by  $f^1 : f_0^* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X'}$ ).

The analytic pull-back  $f^* \mathcal{E}$  of  $\mathcal{E}$  by  $f$  is defined by scalar extension:

$$f^* \mathcal{E} = f_0^* \mathcal{E} \otimes_{f_0^* \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$$