ANNEXE Programme européen

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

notions que le mathématicien met à sa disposition et qui facilitent les exposés et la compréhension (ex.: les différentielles extérieures et le flux). Enfin il faudrait tendre à adapter le déroulement des programmes respectifs dans le temps au mieux des connaissances acquises par les étudiants.

ANNEXE

Programme européen

Premier cycle des Facultés (18 à 20 ans)

1. *Notions générales d'algèbre.*

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions.

Ensembles finis et analyse combinatoire.

Entiers, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble; relation d'équivalence, relation d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale).

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'Alembert-Gauss. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. *Géométrie analytique et géométrie différentielle classique à deux et trois dimensions.*

Equation des droite, plan, cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3.

Coordonnées polaires dans R^2.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Etude d'une courbe plane donnée sous la forme $y = f(x)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou infinie.

Etude locale d'une courbe de R^3 au voisinage d'un point: plan osculateur, courbure, formules de Frenêt; vitesse et accélération d'un mobile, accélération tangentielle et accélération normale.

3. *Algèbre linéaire* (niveau I)

Définition des espaces vectoriels; sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels. Indépendance linéaire; bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires; déterminants.

Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme; équation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques; formes hermitiennes.

Espaces affines; parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R: norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de Cauchy-Schwarz. Bases orthonormales dans R^n.

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point; angle de deux vecteurs, orientation de R^n; produit vectoriel dans R^3.

4. *Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire.*

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles de nombres réels: majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure. Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de Cauchy; théorème de Bolzano-Weierstrass.

Fonctions d'une variable réelle: limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un intervalle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de Rolle; théorème des accroissements finis. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonctions trigonométriques directes et réciproques d'une variable réelle. Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications; division des ploynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de Taylor.

Fonctions de plusieurs variables; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point. Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivée d'une fonction composée. Interprétation géométrique: tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'ordre supérieur; permutabilité. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

5. *Calcul intégral.*

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de Riemann; intégrabilité des fonctions continues, des fonctions monotones. Propriétés de la forme linéaire définie par l'intégrale. Relation entre intégrale indéfinie et fonctions primitives. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle ouvert (fini ou infini): convergence, convergence absolue.

Définition et propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann-Stieltjès par rapport à une mesure positive sur la droite numérique.

Longueur d'une courbe paramétrée; expression de la longueur pour une paramétrisation à dérivée continue. Intégrales curvilignes.

Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, et aux transformations des intégrales multiples (Stokes). (On ne donnera pas de démonstrations; on pourra se borner à démontrer la formule de Riemann, dans le plan, pour un contour simple). Cas particuliers: gradient, divergence, rotationnel.

6. *Séries.*

Séries à termes réels ou complexes; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs: comparaison, critères classiques de convergence. Séries à termes positifs décroissants: comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions; convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développements en série de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^z$, arc tg x, arc sin x.

Théorie élémentaire des séries entières d'une variable réelle ou complexe. Cercle de convergence. Dérivation; intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de e^z, $\sin z$ et $\cos z$ pour z complexe.

Notions élémentaires sur les séries de Fourier: calcul des coefficients.

7. *Equations différentielles.*

Notions fondamentales sur les équations différentielles; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrables par quadrature; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables, avec ou sans second membre.

8. *Analyse numérique.*

Systèmes d'équations linéaires; méthode d'élimination et méthode d'approximations successives. Optimation linéaire; approximation au sens de Tchebycheff et au sens de Gauss. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division, comme exemples simples d'algorithmes. Majoration et calcul de racines, méthode d'approximation de Newton, interpolation par les polynômes; fractions continues.

Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires: méthode d'itération, méthode de Runge-Kutta pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur des machines.

9. *Cinématique et cinétique.*

Equivalence des systèmes de vecteurs: torseurs.

Cinématique :

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale).

Champ des vitesses d'un solide. Changement de repère: composition des vitesses et des accélérations.

Cinétique :

Masse d'un système. Conservation de la masse. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Torseur des quantités d'accélération. Energie cinétique.

Cas du solide. Torseur d'inertie. Exemples simples de mouvements de solides.

10. *Introduction au calcul des probabilités.*

Axiomes du calcul des probabilités.

Quelques lois de probabilité à une dimension: loi binomiale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.

Espérance mathématique d'une fonction; fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions. Méthode des moindres carrés, corrélation, régression.

Deuxième cycle des Facultés (20 à 22 ans)

20. *Compléments d'algèbre.*

Groupes: sous-groupes, groupes-quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels; algèbre tensorielle, contraction.

Formes quadratiques et hermitiennes: loi d'inertie; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive.

Groupe orthogonal, groupe unitaire.

21. *Fonctions analytiques d'une variable complexe.*

Séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent. Théorème du maximum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Exemples de surfaces de Riemann. Représentation conforme.

22. *Compléments de calcul intégral.*

Intégrale de Lebesgue-Stieltjès dans R^n pour les fonctions numériques: énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

23. *Espaces fonctionnels.*

Espaces métriques; limite, continuité. Espaces métriques complets.

Espaces vectoriels normés; espaces de Banach.

Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations (fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet.

24. *Equations intégrales.*

Equation de Volterra.

Equation de Fredholm: cas du noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en série de fonctions orthogonales.

25. *Equations différentielles ordinaires.*

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

Théorème de Fuchs pour une équation linéaire du second ordre.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, nœud, foyer).

Problèmes aux limites du type Sturm-Liouville.

26. *Equations aux dérivées partielles.*

Une équation quasi-linéaire du premier ordre: problème de Cauchy, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi-linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de Pfaff complètement intégrable.

Equation du deuxième ordre: séparation des variables.

Equations du deuxième ordre à coefficients constants:

— Type elliptique: équation $\triangle\varphi = 0$; théorème de la moyenne, solution élémentaire; unicité pour les problèmes de Neumann et de Dirichlet; fonction de Green, formule de Poisson pour la sphère; intégrale de l'énergie (Dirichlet). Equation $\triangle\varphi + k^2\varphi = 0$: la condition de radiation; réduction à une équation intégrale.

— Type hyperbolique: équation des ondes à une, trois et deux variables d'espace; solution élémentaire, problème aux limites; formules de Poisson et de Kirchhoff. Méthode de descente. Intégrale d'énergie. solution élémentaire; problème aux limites.

— Type parabolique: équation de la chaleur à une variable d'espace;

27. *Calcul des variations.*

Equations d'Euler-Lagrange pour les intégrales simples ou multiples. Conditions aux limites naturelles. Multiplicateurs de Lagrange.

28. *Distributions, transformations de Fourier et de Laplace.*

Définition des distributions sur R^n. Dérivation des distributions; exemples.

Transformation de Fourier et de Laplace: introduction à la théorie. Applications aux équations aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

29. *Fonctions spéciales.*

1) Fonction Γ (z). Développements asymptotiques.
2) Un choix entre les fonctions suivantes:

— fonctions de Bessel-Hankel-Neumann; expression asymptotique, expressions intégrales.
— fonctions de Legendre, de Legendre associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) Eventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes:

— fonctions hypergéométriques;
— polynômes de Laguerre;
— polynômes d'Hermite;
— fonctions de Mathieu;
— fonctions elliptiques.

Institut H. Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris V^e