5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Für alle n gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geqq 2^{-(d_1 + \ldots + d_{k+1} + k + 1)} > 0 .$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0 ,$$

d.h. die Folge (x_n) kann nicht gegen x konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim_{n\to\infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

5. Konstruktion einer Lösung von (2)

Es sei (d_m) eine Z-Folge aus D. (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{5}$$

zuordnen. Dabei bedeutet $\sum_m^*$ die Summe über alle m, für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass z entweder eine positive reelle Zahl ist oder ∞. Denn nach Definition einer Z-Folge (d_m) sind alle d_m nicht negativ, und mindestens ein d_m ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist z entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \,\varepsilon\, (0, \infty] .$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus (0,1) in eineindeutiger Weise eine Z-Folge aus D zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

ist, so soll

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} \tag{6}$$

sein.

Für diese Funktion gilt

$$0 < z(x) \leqq \infty \qquad x \,\varepsilon\, (0,1). \tag{7}$$

Jetzt beweisen wir den folgenden

Satz 1. *$z(x)$ ist eine nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung* (2).

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

1. *Schritt.* Es wird folgende Aussage bewiesen:

(A_1) Wenn $x_0 \,\varepsilon\, (0,1)$, $z(x_0) = \infty$, $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n) = \infty$.

Es sei $x_0 \leftrightarrow (d_m)$, $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nach Hilfssatz 4 ist Aussage $\lim x_n = x_0$ gleichbedeutend mit $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \infty$. Unter Beachtung der Voraussetzung

$$z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

kann man jetzt zeigen, dass $z(x_n)$ bebliebig gross gemacht werden kann, wenn man nur n genügend gross wählt; zu einer beliebig grossen Zahl $K > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl M so, dass

$$K < \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

ist. Weiter wählen wir eine zweite genügend grosse natürliche Zahl N so, dass

$$i_n > M \qquad\qquad n > N$$

ist. Betrachten wir jetzt solche x_n, für die $n > N$ ist, so erhalten wir die Abschätzung

$$z(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^{M}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$+ \sum_{m=M+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} > K.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) = \infty ,$$

und somit ist (A_1) verifiziert.

2. *Schritt.* Es wird gezeigt:

(A_2) Wenn $x_0 \varepsilon (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gilt für alle Folgen $(x_n) \subset (0, x_0)$, die die Bedingung $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ erfüllen, die Beziehung

$$\lim \inf z(x_n) \geqq z(x_0) .$$

Wir beweisen (A_2), indem wir die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führen. Aus dieser Annahme kann man folgern: Es gibt einen Punkt x_0 und eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$, für welche gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ,$$

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) = b < z(x_0) = a .$$

Die entsprechenden Z-Folgen seien

$$x_0 \leftrightarrow (d_m)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \\ i_n = i(x_n, x_0) \end{array} \right\} n = 1, 2, \ldots$$

Danach (A_2) die Beziehung $x_n < x_0$ gilt, können wir wieder Hilfssatz 4 anwenden, und erhalten wegen $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} i_n = \infty .$$

Weil $z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} = a$ ist, folgt nach bekannten Sätzen über unendliche Reihen, dass ein K angegeben werden kann, für das

$$\sum_{K}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} < \frac{a-b}{2}$$

gilt. (Ein solches K existiert, da $a - b > 0$ ist.) Weiter wählen wir zu diesem K ein N derart, dass

$$i_n > K \qquad\qquad n > N$$

ist. Für diese Werte N, K und $n > N$ schätzen wir jetzt die folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned} z(x_0) - z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{K-1}{}^{*} d_m^{-1} + \sum_{m=K}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{K-1}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=K}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} < \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$z(x_0) - z(x_n) < \frac{a-b}{2} \qquad\qquad n > N.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} \leqq \frac{a-b}{2},$$

und dieses Resultat steht wegen unserer Annahme $b < a$ im Widerspruch zu

$$\lim_{n\to\infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} = a - b.$$

Es ist somit $b < a$ falsch und daher (A_2) richtig.

3. *Schritt.* Nun zeigen wir:

(A_3) Wenn $x_0 \in (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gibt es zu jedem $c \geqq a$ eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} z(x_n) = c$.

Um (A_3) zu beweisen, greifen wir wieder ein $c \geqq a$ und beliebiges $x_0 \in (0,1)$ heraus. Dann werden wir eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ konstruieren, für die gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z(x_n) = c.$$

Dem x_0 sei die Z-Folge (d_m) zugeordnet. Nun stellen wir die Folgenglieder x_n wieder durch Z-Folgen dar,

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m}$ werden nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$(W_1) \qquad \begin{array}{ll} d_{n,m} = d_m & n = 1, 2, 3, \ldots \\ d_{n,n} = d_n + n & n = 1, 2, \ldots n - 1 \end{array}$$

Damit sind aber in jeder Z-Folge $(d_{n,m})$ erst die ersten n Folgenglieder festgelegt. Die restlichen werden auf die folgende Art bestimmt: Wir setzen

$$a_n = c - a + \sum_{m=n}^{\infty} d_m^{-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Die $d_{n,m,}$, $m > n$, sollen so bestimmt werden, dass

$$(W_2) \qquad \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*}\, d_{n,m}^{-1} = a_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ist. (Falls alle $a_n = 0$ sind, werden alle $d_{n,m} = 0$ gewählt, und die linke Seite wird gleich null gesetzt). Nicht-negative ganze Zahlen $d_{n'm}$ so zu finden, dass (W_2) erfüllt ist, ist im allgemeinen sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Hat man jetzt ein System von Folgen $(d_{n,m})$ nach (W_1) und (W_2) gefunden, so erfüllt die diesen Z-Folgen zugeordnete Folge (x_n) die Bedingungen

$$x_n < x_0 ,$$

weil nach (W_1) $i_n = i(x_n, x_0) = n$ und $d_{n,m} > d_n$ ist, [vgl. (B) Abschnitt 4] und

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 ,$$

weil nach (W_1) $\lim\limits_{n \to \infty} i_n = \infty$ ist [vgl. Hilfssatz 2 (b)]. Ausserdem gilt unter Verwendung von (W_1) und (W_2):

$$z(x_n) - z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*}\, d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*}\, d_m^{-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty}{}^{*} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} d_m^{-1}$$

$$= \frac{1}{d_n + n} + c - a \, ,$$

also

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \to \infty} z(x_n) = c \, .$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1), (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. Weitere Folgerungen

Es sei E die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \varepsilon (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad und \quad E \cup F = (0,1) \, .$$

Die Lage von E und F in (0,1) beschreibt der folgende

Satz 2. *Jeder Punkt $x \varepsilon (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F. (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit (0,1) in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in (0,1) dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 $(x_1 < x_2)$ aus (0,1) eine konti-