1. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

von R. Z. Domiaty

1. Einleitung und Problemstellung

Unter *Funktionen* $f(x), g(x), z(x), \ldots$ verstehen wir im weiteren ausnahmlos eindeutige, reelle Funktionen, die auch $\pm\infty$ als Funktionswerte annehmen dürfen, mit dem Definitionbereich $(0,1)$. Dabei bezeichnet (a, b) das offene Intervall $a < x < b$ und $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall $a \leqq x \leqq b$.

An jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches kann man einer Funktion $f(x)$ eine Menge $L_f(x_0)$ nach der Vorschrift

$$L_f(x_0) = \bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0,x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \qquad x_0 \,\varepsilon\, (0,1) \qquad (1)$$

zuordnen. Dabei verstehen wir unter (a_n) eine Folge und unter $(a_n)'$ die Häufungswertmenge von (a_n). Mit $\bigcup_{\lambda} A_\lambda$ bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der Mengen A_λ. Somit ist $L_f(x_0)$ eine Verallgemeinerung des Begriffes der Hülle einer Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereiches; vgl. z.B. [1], S. 188.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Funktionalgleichung

$$L_f(x) = [f(x), +\infty] \qquad x \,\varepsilon\, (0,1). \qquad (2)$$

Eine Funktion $g(x)$ heisst eine *Lösung* von (2), wenn $g(x)$ die Funktionalgleichung (2) identisch, d.h. in jedem Punkt aus $(0,1)$, erfüllt.

Wie man sieht, ist die Funktion $h(x) = +\infty$ eine Lösung von (2). Diese bezeichnen wir als die *triviale Lösung* von (2). Jede andere Lösung von (2) heisst eine *nichttriviale Lösung*.

Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion einer nichttrivialen Lösung von (2), und zwar ohne Verwendung des Auswahlaxioms oder gleichwertiger Sätze.