

ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

Autor(en): **Domiaty, R. Z.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

von R. Z. DOMIATY

1. EINLEITUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Unter *Funktionen* $f(x)$, $g(x)$, $z(x)$, ... verstehen wir im weiteren ausnahmslos eindeutige, reelle Funktionen, die auch $\pm \infty$ als Funktionswerte annehmen dürfen, mit dem Definitionsbereich $(0,1)$. Dabei bezeichnet (a,b) das offene Intervall $a < x < b$ und $[a,b]$ das abgeschlossene Intervall $a \leq x \leq b$.

An jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches kann man einer Funktion $f(x)$ eine Menge $L_f(x_0)$ nach der Vorschrift

$$L_f(x_0) = \bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \quad x_0 \in (0,1) \quad (1)$$

zuordnen. Dabei verstehen wir unter (a_n) eine Folge und unter $(a_n)'$ die Häufungswertmenge von (a_n) . Mit $\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ bezeichnen wir die Vereinigungsmenge der Mengen A_{λ} . Somit ist $L_f(x_0)$ eine Verallgemeinerung des Begriffes der Hülle einer Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereiches; vgl. z.B. [1], S. 188.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Funktionalgleichung

$$L_f(x) = [f(x), +\infty] \quad x \in (0,1). \quad (2)$$

Eine Funktion $g(x)$ heisst eine *Lösung* von (2), wenn $g(x)$ die Funktionalgleichung (2) identisch, d.h. in jedem Punkt aus $(0,1)$, erfüllt.

Wie man sieht, ist die Funktion $h(x) = +\infty$ eine Lösung von (2). Diese bezeichnen wir als die *triviale Lösung* von (2). Jede andere Lösung von (2) heisst eine *nichttriviale Lösung*.

Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion einer nichttrivialen Lösung von (2), und zwar ohne Verwendung des Auswahlaxioms oder gleichwertiger Sätze.

2. EIN HILFSSATZ

Ein wesentliche Rolle wird die folgende Aussage spielen:

HILFSSATZ 1. *Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann eine Lösung von (2), wenn für jedes $x_0 \in (0,1)$ gilt:*

1. *Für jede Folge (x_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ist*

$$\liminf f(x_n) \geq f(x_0).$$

2. *Für jedes $a \in [f(x_0), +\infty]$ gibt es eine Folge (y_n) aus $(0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = a$.*

Beweis. a) Wenn $f(x)$ eine Lösung von (2) ist, folgen die beiden Aussagen unseres Hilfssatzes unmittelbar aus der Bedeutung von $L_f(x_0)$ in (1).

b) Jetzt sei $f(x)$ eine Funktion, die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. x_0 sei ein beliebiger Punkt aus $(0,1)$. Wir zeigen, dass $L_f(x_0) = [f(x_0), +\infty]$ ist. Wegen 1. gilt

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \subseteq [f(x_0), +\infty],$$

und wegen 2. auch

$$\bigcup_{\substack{(x_n) \subset (0, x_0) \\ (x_n)' = \{x_0\}}} (f(x_n))' \supseteq [f(x_0), +\infty].$$

Daraus folgt unsere Behauptung.

3. EINE DARSTELLUNG REELLER ZAHLEN AUS $(0,1)$ DURCH GEWISSE FOLGEN

Um eine nichttriviale Lösung von (2) zu konstruieren, benötigen wir eine spezielle Darstellung der reellen Zahlen aus $(0,1)$, die von den üblichen Darstellungen abweicht. Bekanntlich kann man die Zahlen aus $(0,1)$ eineindeutig durch nicht-abbrechende Dualbrüche darstellen. Wenn also r eine beliebige reelle Zahl aus $(0,1)$ ist, gilt

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_i \dots \quad \delta_i = 0 \text{ oder } 1$$

mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(E_1) Es gibt einen Index m , $m \geq 1$, für den $\delta_m = 0$ ist.

(E_2) In der Folge der Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$ kommt die Zahl 1 unendlich oft vor.

Die Aussage (E_1) trifft zu, weil $r \neq 1$ ist. (E_2) ist erfüllt, weil wir abbrechende Dualbrüche ausgeschlossen haben.

Jeder solchen Dualbruchentwicklung und damit jeder reellen Zahl aus $(0,1)$ können wir in eindeutiger Weise eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, in der mindestens ein positives Element vorkommt, auf die folgende Art zuordnen:

(Z) Wenn $r \in (0,1)$ ist und die Dualbruchentwicklung

$$r = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_i \dots = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{d_1} \underbrace{10 \dots 0}_{d_2} \underbrace{10 \dots 0}_{d_3} 10 \dots$$

Nullen Nullen Nullen

mit den Eigenschaften (E_1) und (E_2) besitzt, dann wird der Zahl r die Folge (d_m) zugeordnet. Diese Folge nennen wir im weiteren die *zugeordnete Folge*, kurz: die Z -Folge, von r .

D sei die Menge aller Folgen (d_m) mit den Eigenschaften:

(Z_1) Für alle m ist d_m eine nichtnegative ganze Zahl.

(Z_2) Es gibt einen Index q , für den $d_q > 0$ ist.

Dann stellt die Zuordnungsvorschrift (Z) eine eindeutige Abbildung von $(0,1)$ auf D dar.

Wir können daher mit der gleichen Berechtigung, mit der wir eine reelle Zahl r aus $(0,1)$ durch einen Dualbruch darstellen, jetzt eine reelle Zahl durch die ihr nach (Z) zugeordnete Z -Folge aus D darstellen.

Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl r , die einer Z -Folge (d_m) aus D zugeordnet ist, kann man mittels der Formel

$$r = \sum_{M=1}^{\infty} 2^{-\left\{M + \sum_{m=1}^M d_m\right\}} \quad (3)$$

angeben.

4. SÄTZE ÜBER DAS RECHNEN MIT Z-FOLGEN

Die eindeutige Zuordnung der reellen Zahlen aus $(0,1)$ zu den Z-Folgen aus D schreiben wir abgekürzt in der Form

$$x \leftrightarrow (d_m) \quad x \in (0,1), \quad (d_m) \in D.$$

Damit ist gemeint, dass (d_m) die der Zahl x gemäss (Z) zugeordnete Z-Folge ist. Daraus kann man sofort folgende Aussage ableiten:

(A) Wenn $x_1 \leftrightarrow (d_{1,m})$ und $x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$ ist, so ist $x_1 = x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,m} = d_{2,m}$ für alle $m = 1, 2, 3, \dots$

Das gibt jetzt Anlass zu der

DEFINITION 1. Die natürliche Zahl $i = i(x_1, x_2)$ heisst der Index zweier verschiedener reeller Zahlen x_1 und x_2 aus $(0,1)$, wenn folgendes gilt:

$$1. \quad x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}) \text{ und } x_2 \leftrightarrow (d_{2,m})$$

$$2. \quad d_{1,i} \neq d_{2,i}$$

3. Wenn $i > 1$ ist, so sei auch $d_{1,k} = d_{2,k}$ für alle $k = 1, 2, \dots, i - 1$.

Mit dieser Bezeichnung gilt jetzt

(B) Es sei

$$x_1 \neq x_2, x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}) \text{ und } i = i(x_1, x_2).$$

Dann ist $x_1 > x_2$ gleichbedeutend mit $d_{1,i} < d_{2,i}$.

HILFSSATZ 2. a) Es sei $x \leftrightarrow (d_m)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$ derart, dass für alle $y \in (0,1)$ aus der Beziehung $i(x, y) > k$ die Beziehung $|x - y| < \varepsilon$ folgt.

b) Es sei

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}), \quad x \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \neq x \text{ und } i_n = i(x_n, x)$$

für $n = 1, 2, \dots$ Dann folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Beweis. Da *b)* unmittelbar aus *a)* folgt, genügt es, *a)* zu beweisen. $\varepsilon > 0$ sei beliebig und fest. Wir wählen jetzt eine natürliche Zahl k so, dass $\varepsilon > 2^{1-k}$ ist, und betrachten nur solche y aus $(0,1)$, für die $i(x, y) \geq k+1$ ist. Ein solches y greifen wir heraus. Die zugeordnete *Z-Folge* sei (d_m^*) , und der Index sei i^* . Dann kann man die Differenz $|x - y|$ vermöge (3) abschätzen:

$$\begin{aligned} |x - y| &= |2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} + 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+2} + k + 2)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_1^* + \dots + d_{k+1}^* + k + 1)} - 2^{-(d_{k+1}^* + \dots + d_{k+2}^* + k + 2)} - \dots| \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [2^{-d_{k+1}} + 2^{-(d_{k+1} + d_{k+2} + 1)} + \dots \\ &\quad + 2^{-d_{k+1}^*} + 2^{-(d_{k+1}^* + d_{k+2}^* + 1)} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k + k + 1)} [1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots] \\ &\leq 2^{-(d_1 + \dots + d_k)} 2^{-k+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Aussage *b)* in Hilfssatz 2 nicht umkehrbar ist. Das zeigt das Beispiel

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5-n} \leftrightarrow (d_{n,m}) = (0, 3, n, 0, 0, \dots 0, \dots) \\ x &= 2^{-1} + 2^{-5} \leftrightarrow (d_m) = (0, 4, 0, 0, \dots 0, \dots). \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = 2$.

Im weiteren benötigen wir oft den bekannten

HILFSSATZ 3. (q_l) sei eine Folge natürlicher Zahlen. Dann ist die Negation der Aussage $\lim_{l \rightarrow \infty} q_l = \infty$ gleichwertig mit der Aussage, dass in der Folge (q_l) eine feste natürliche Zahl k unendlich oft vorkommt.

Weiter brauchen wir den

HILFSSATZ 4. Es sei $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$, $x \leftrightarrow (d_m)$, $x_n < x$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gleichwertig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$.

Beweis. Wegen Hilfssatz 2, b) haben wir nur zu beweisen, dass unter der angegebenen Voraussetzung aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ folgt. Wir führen den Beweis indirekt. Aus der Annahme, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ nicht gilt, folgt mit Hilfssatz 3, dass es eine natürliche Zahl k gibt, die in der Folge der (i_n) unendlich oft vorkommt. Es sei also (λ_n) eine unendliche Teilfolge aus der Folge der natürlichen Zahlen (n) mit der Eigenschaft

$$i_{\lambda_n} = k \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Für alle n gilt wegen (4)

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+1)} + 2^{-(d_1+d_2+2)} + \dots + 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+1)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+d_{\lambda_n,2}+2)} - \dots - \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k}+k)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} + 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k}+k)} - 2^{-(d_{\lambda_n,1}+\dots+d_{\lambda_n,k+1}+k+1)} - \dots \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k-1}+k)} \{ 2^{-d_k} + 2^{-(d_k+d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - [2^{-d_{\lambda_n,k}} + 2^{-(d_{\lambda_n,k}+d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \}. \end{aligned}$$

Nach unserer Voraussetzung sind alle x_{λ_n} kleiner als x . Weil für jedes λ_n stets $i(x_{\lambda_n}, x) = k$ ist, gilt also wegen (B) für alle λ_n die Beziehung

$$d_k + 1 \leq d_{\lambda_n, k}.$$

Setzt man das in die vorhergehende Formel ein, so erhält man für alle n

$$\begin{aligned} x_0 - x_{\lambda_n} &= 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} \{ 1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} + \dots \\ &\quad - 2^{-(d_{\lambda_n,k}-d_k)} [1 + 2^{-(d_{\lambda_n,k+1}+1)} + \dots] \} \\ &\geq 2^{-(d_1+\dots+d_k+k)} [1 + 2^{-(d_{k+1}+1)} - 2^{-1}(1 + 2^{-1} + \dots)] \\ &= 2^{-(d_1+\dots+d_{k+1}+k+1)} > 0. \end{aligned}$$

Für alle n gilt demnach

$$x - x_{\lambda_n} \geq 2^{-(d_1 + \dots + d_{k+1} + k + 1)} > 0.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\liminf (x - x_{\lambda_n}) > 0,$$

d.h. die Folge (x_n) kann nicht gegen x konvergieren. Damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Annahme, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ nicht gilt. Somit ist diese Annahme falsch und der Hilfssatz bewiesen.

5. KONSTRUKTION EINER LÖSUNG VON (2)

Es sei (d_m) eine Z -Folge aus D . (Siehe Abschnitt 2). Jeder solchen Folge kann man einen Ausdruck

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \quad (5)$$

zuordnen. Dabei bedeutet $\sum_m {}^*$ die Summe über alle m , für die $d_m \neq 0$ ist. Es lässt sich zeigen, dass z entweder eine positive reelle Zahl ist oder ∞ . Denn nach Definition einer Z -Folge (d_m) sind alle d_m nicht negativ, und mindestens ein d_m ist von Null verschieden. Die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{m=1}^M {}^* d_m^{-1} \right)$$

ist daher eine monoton steigende Folge. Also ist z entweder konvergent oder bestimmt divergent. Es gilt daher

$$z \in (0, \infty].$$

Nach den Überlegungen im Abschnitt 3 kann man jeder reellen Zahl aus $(0,1)$ in eindeutiger Weise eine Z -Folge aus D zuordnen. Somit kann man mit (5) auf folgende Art eine positive reelle Funktion erklären: Wenn

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

ist, so soll

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_m^{-1} \quad (6)$$

sein.

Für diese Funktion gilt

$$0 < z(x) \leq \infty \quad x \in (0,1). \quad (7)$$

Jetzt beweisen wir den folgenden

SATZ 1. *$z(x)$ ist eine nichttriviale Lösung der Funktionalgleichung (2).*

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritten geführt.

1. *Schritt.* Es wird folgende Aussage bewiesen:

(A₁) Wenn $x_0 \in (0,1)$, $z(x_0) = \infty$, $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ist, dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty$.

Es sei $x_0 \leftrightarrow (d_m)$, $x_n \leftrightarrow (d_{n,m})$ und $i_n = i(x_n, x)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Nach Hilfssatz 4 ist Aussage $\lim x_n = x_0$ gleichbedeutend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$. Unter Beachtung der Voraussetzung

$$z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_m^{-1}$$

kann man jetzt zeigen, dass $z(x_n)$ beliebig gross gemacht werden kann, wenn man nur n genügend gross wählt; zu einer beliebig grossen Zahl $K > 0$ wählen wir eine natürliche Zahl M so, dass

$$K < \sum_{m=1}^M {}^*d_m^{-1}$$

ist. Weiter wählen wir eine zweite genügend grosse natürliche Zahl N so, dass

$$i_n > M \quad n > N$$

ist. Betrachten wir jetzt solche x_n , für die $n > N$ ist, so erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^M {}^*d_{n,m}^{-1} + \sum_{m=M+1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} = \sum_{m=1}^M {}^*d_m^{-1} \\ &+ \sum_{m=M+1}^{\infty} {}^*d_{n,m}^{-1} > K. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty,$$

und somit ist (A_1) verifiziert.

2. *Schritt.* Es wird gezeigt:

(A_2) Wenn $x_0 \in (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gilt für alle Folgen $(x_n) \subset (0, x_0)$, die die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ erfüllen, die Beziehung

$$\liminf z(x_n) \geq z(x_0).$$

Wir beweisen (A_2) , indem wir die gegenteilige Annahme zu einem Widerspruch führen. Aus dieser Annahme kann man folgern: Es gibt einen Punkt x_0 und eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$, für welche gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = b < z(x_0) = a.$$

Die entsprechenden Z -Folgen seien

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\leftrightarrow (d_m) \\ x_n &\leftrightarrow (d_{n,m}) \\ i_n &= i(x_n, x_0) \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots$$

Danach (A_2) die Beziehung $x_n < x_0$ gilt, können wir wieder Hilfssatz 4 anwenden, und erhalten wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty.$$

Weil $z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} = a$ ist, folgt nach bekannten Sätzen

über unendliche Reihen, dass ein K angegeben werden kann, für das

$$\sum_K^{\infty} d_m^{-1} < \frac{a-b}{2}$$

gilt. (Ein solches K existiert, da $a - b > 0$ ist.) Weiter wählen wir zu diesem K ein N derart, dass

$$i_n > K \qquad n > N$$

ist. Für diese Werte N , K und $n > N$ schätzen wir jetzt die folgende Differenz ab:

$$\begin{aligned} z(x_0) - z(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{K-1} * d_m^{-1} + \sum_{m=K}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=1}^{K-1} * d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} \\ &= \sum_{m=K}^{\infty} * d_m^{-1} - \sum_{m=K}^{\infty} * d_{n,m}^{-1} < \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$z(x_0) - z(x_n) < \frac{a-b}{2} \qquad n > N.$$

Das bedeutet aber gerade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} \leq \frac{a-b}{2},$$

und dieses Resultat steht wegen unserer Annahme $b < a$ im Widerspruch zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ z(x_0) - z(x_n) \} = a - b.$$

Es ist somit $b < a$ falsch und daher (A_2) richtig.

3. *Schritt.* Nun zeigen wir:

(A_3) Wenn $x_0 \in (0,1)$ und $z(x_0) = a < \infty$ ist, dann gibt es zu jedem $c \geq a$ eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c$.

Um (A_3) zu beweisen, greifen wir wieder ein $c \geq a$ und beliebiges $x_0 \in (0,1)$ heraus. Dann werden wir eine Folge $(x_n) \subset (0, x_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ konstruieren, für die gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Dem x_0 sei die Z -Folge (d_m) zugeordnet. Nun stellen wir die Folgenglieder x_n wieder durch Z -Folgen dar,

$$x_n \leftrightarrow (d_{n,m}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Die $d_{n,m}$ werden nach folgender Vorschrift bestimmt:

$$(W_1) \quad \begin{aligned} d_{n,m} &= d_m & n &= 1, 2, 3, \dots \\ d_{n,n} &= d_n + n & n &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Damit sind aber in jeder Z -Folge $(d_{n,m})$ erst die ersten n Folgenglieder festgelegt. Die restlichen werden auf die folgende Art bestimmt: Wir setzen

$$a_n = c - a + \sum_{m=n}^{\infty} d_m^{-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

Die $d_{n,m}$, $m > n$, sollen so bestimmt werden, dass

$$(W_2) \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} d_{n,m}^{-1} = a_n \quad n = 1, 2, \dots$$

ist. (Falls alle $a_n = 0$ sind, werden alle $d_{n,m} = 0$ gewählt, und die linke Seite wird gleich null gesetzt). Nicht-negative ganze Zahlen $d_{n,m}$ so zu finden, dass (W_2) erfüllt ist, ist im allgemeinen sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Hat man jetzt ein System von Folgen $(d_{n,m})$ nach (W_1) und (W_2) gefunden, so erfüllt die diesen Z -Folgen zugeordnete Folge (x_n) die Bedingungen

$$x_n < x_0,$$

weil nach (W_1) $i_n = i(x_n, x_0) = n$ und $d_{n,m} > d_n$ ist, [vgl. (B) Abschnitt 4] und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

weil nach (W_1) $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ ist [vgl. Hilfssatz 2 (b)]. Ausserdem gilt unter Verwendung von (W_1) und (W_2) :

$$z(x_n) - z(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^{n-1} {}^* d_{n,m}^{-1} + d_{n,n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} {}^* d_{n,m}^{-1} - \sum_{m=1}^{n-1} {}^* d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + a_n - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a + \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} - \sum_{m=n}^{\infty} {}^* d_m^{-1} \\
 &= \frac{1}{d_n + n} + c - a,
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) - z(x_0) = c - a$$

oder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = c.$$

Damit ist auch (A_3) bewiesen.

(A_1) , (A_2) und (A_3) ergeben mit Hilfssatz 1 gerade die Behauptung unseres Satzes 1.

6. WEITERE FOLGERUNGEN

Es sei E die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) < \infty$ ist und F die Menge aller $x \in (0,1)$, für die $z(x) = \infty$ ist. Trivialerweise gilt

$$E \cap F = \emptyset \quad \text{und} \quad E \cup F = (0,1).$$

Die Lage von E und F in $(0,1)$ beschreibt der folgende

SATZ 2. *Jeder Punkt $x \in (0,1)$ ist ein Kondensationspunkt der Menge E und auch der Menge F . (Genauer: In jeder Umgebung von x kann man eine Teilmenge von F bzw. G angeben, die die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.)*

Insbesondere ist damit $(0,1)$ in zwei elementefremde Teilmengen der Mächtigkeit des Kontinuums zerlegt worden, die beide in $(0,1)$ dicht liegen.

Beweisskizze. Satz 2 ist bewiesen, wenn man zeigt, dass zu zwei beliebigen Punkten x_1 und x_2 ($x_1 < x_2$) aus $(0,1)$ eine konti-

numismmächtige Teilmenge $E^* \subseteq E$ und eine kontinuumsmächtige Teilmenge $F^* \subseteq F$ existieren, die in (x_1, x_2) liegen. Es sei

$$x_1 \leftrightarrow (d_{1,m}), \quad x_2 \leftrightarrow (d_{2,m}), \quad i = i(x_1, x_2) \text{ und } d_{1,i} > d_{2,i}.$$

Unter (p_k) wollen wir im weiteren eine unendliche Folge verstehen, die aus der Folge (2^k) durch eine beliebige Umordnung entsteht. P sei die Menge aller Folgen (p_k) . P besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, denn P kann als die Menge aller Anordnungen der abzählbar-unendlichen Menge $2^1, 2^2, \dots$ aufgefasst werden, und diese ist von der Mächtigkeit des Kontinuums; vgl. [3], S. 67.

Es sei E^* die Menge aller $y \in (0,1)$, wobei

$$y \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(p_k) \in P$ und

$$d_m = \begin{cases} d_{2,m} & \text{für } m \leq i \\ d_{2,i+1} + 1 & \text{für } m = i + 1 \\ p_k & \text{für } m = i + 1 + k. \end{cases}$$

gilt. Diese Menge E^* ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, denn man kann jedem $y \in E^*$ genau eine Anordnung $(p_n) \in P$ zuordnen. Nach der Konstruktionsvorschrift ist ferner für jedes $y \in E^*$

$$i(y, x_1) = i, \quad i(y, x_2) = i + 1,$$

$$d_{1,i} > d_i, \quad d_{i+1} > d_{2,i+1}.$$

Also ist

$$x_1 < y < x_2 \quad y \in E^*.$$

Da aber auch

$$\begin{aligned} z(y) &= \sum_{m=1}^i d_m^{-1} + d_{i+1}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^i d_{2,m}^{-1} + \frac{1}{d_{2,i+1} + 1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty \end{aligned}$$

gilt, ist somit die Existenz von E^* bewiesen. Der Existenz-

beweis von F^* verläuft analog, wobei nur anstelle der Folge (2^k) die Folge (k) zu setzen ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Bezeichnet man mit $A(a)$, $0 < a < \infty$, die Menge aller $x \in (0,1)$, für welche $z(x) = a$ ist, so kann man auch den folgenden Satz beweisen.

SATZ 3. 1. $A(a)$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

2. $A(a)$ ist nirgends dicht in $(0,1)$.

Beweisskizze. Zu Punkt 1. Jede positive reelle Zahl a kann in der Form

$$a = r_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-r_j}$$

dargestellt werden, wobei r_0 eine nicht-negative ganze Zahl ist und r_j natürliche Zahlen sind, für die $r_j < r_{j+1}$ gilt ($j = 1, 2, \dots$). Es sei Q die Menge aller Folgen (q_s) , wobei (q_s) Folgen sind, die aus der Folge (2^s) durch beliebige Umordnungen hervorgehen. M sei die Menge aller $x \in (0,1)$, für die

$$x \leftrightarrow (d_m)$$

mit $(q_s) \in Q$ und

$$d_m = \begin{cases} q_s & \text{für } m = 2t - 1 \\ 1 & \text{für } m = 2t \text{ und } t \leq n_0 \\ 0 & \text{für } m = 2t \text{ und } t > n_0 \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots$$

gilt. M besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums, und für jedes $x \in M$ ist

$$z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-1} = n_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s = a.$$

Es ist aber $(0,1) \supseteq A(a) \supseteq M$, und somit besitzt auch $A(a)$ die Mächtigkeit des Kontinuums.

Zu Punkt 2. Man zeigt zunächst (ähnlich wie beim Beweis zu Hilfssatz 4), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gleichwertig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ ist, wenn man folgendes voraussetzt:

$$x_0 \leftrightarrow (d_m), \quad x_n \leftrightarrow (d_{m,n}), \quad x_n \neq x_0, \quad i_n = i(x_n, x_0) \text{ und } (d_m)$$

enthält unendlich viele positive Glieder. Damit beweist man, dass aus

$$z(x_0) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(x_n) = \infty$$

folgt. Den Beweis, dass $A(a)$ nirgends dicht in $(0,1)$ ist, führt man dann indirekt. Aus der gegenteiligen Annahme folgt, dass eine Umgebung $U_0 \subseteq (0,1)$ existiert, in der $A(a)$ dicht liegt. Da nach Satz 2 die Menge F in $(0,1)$ dicht liegt, liegt F auch U_0 dicht. Nun sei $y \in U_0 \cap F$. Es ist dann

$$z(y) = \infty.$$

Weil $A(a)$ in U_0 dicht, liegt muss es eine Folge $(y_n) \subset A(a)$ geben, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ist. Nach dem obigen muss dann einerseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = \infty$$

sein. Da aber andererseits für alle n stets $z(y_n) = a$ ist, gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(y_n) = a.$$

Das stellt einen Widerspruch gegen unsere Annahme dar. Somit ist diese Annahme falsch und damit unser Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HAHN, H. *Reelle Funktionen*, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.
- [2] ALEXANDROFF, P. S. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
- [3] KAMKE, E. *Mengenlehre*, Sammlung Götschen Bd. 999/999a. Verlag Walter de Gruyter, Berlin 1955

(Reçu le 10 avril 1965)

Dr. R. Z. Domiaty
Technische Hochschule
Graz

Vide-leer-empty