2. DIVISIBILITÉ DES ENTIERS ORDINAIRES ET DES ENTIERS ALGÉBRIQUES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

2. DIVISIBILITÉ DES ENTIERS ORDINAIRES ET DES ENTIERS ALGÉBRIQUES

La géométrie d'Euclide expose la *théorie de la divisibilité:* algorithme d'Euclide, propriétés du p.g.c.d. et du p.p.c.m. décomposition des nombres en produits de facteurs premiers.

On peut rattacher, à ces préoccupations, les extensions de la théorie de la divisibilité à des ensembles où existent, une addition (commutative et associative), une soustraction, une multiplication (commutative, associative et distributive), appelés *anneaux*.

Un premier type de ces extensions est l'étude des *polynomes d'une variable* dont les coefficients sont dans un corps. Il existe des polynomes irréductibles, jouant la rôle de facteurs premiers, mais leur définition n'est pas absolue, elle dépend du corps. Les coefficients jouent le rôle de diviseurs de 1.

Un autre type d'extension est l'ensemble des *entiers de Gauss* $a+bi$, avec a et b entiers rationnels. Il y a cette fois 4 nombres ± 1, $\pm i$ qui jouent le rôle de diviseurs de 1, c'est-à-dire qui ont des inverses. On ne distingue pas les nombres qui ne diffèrent entre eux que par multiplication par un de ces diviseurs de 1. Il existe encore un algorithme de division et une décomposition des entiers en facteurs premiers. Ces propriétés établissent en même temps celles des entiers qui peuvent être représentés par une somme de 2 carrés, grâce à la relation $a^2+b^2 = (a+bi)\ (a-bi)$.

Pour l'étude du problème de Fermat, on a tenté de généraliser ces propriétés aux entiers de la *division du cercle*, correspondant à la décomposition $a^n+b^n = \Pi(a+b\omega_i)$. KUMMER a montré qu'il n'y a plus nécessairement une décomposition en facteurs premiers et en a déduit la nécessité d'introduire des *facteurs idéaux*.

Des exemples plus généraux ont été envisagés: entiers algébriques, racines d'équation de la forme $x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots =0$, a_i entiers ordinaires. Le point de vue de KUMMER a été repris pour des entiers algébriques par DEDEKIND, qui a interprété le facteur idéal par un ensemble convenable de tels entiers.

Bibliographie: 1, 7, 9, 12, 15, 20, 30, 36, 37.