

9. The related équation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

9. THE RELATED EQUATION.

We are prepared now to make the construction toward which this entire discussion has been directed.

Consider the equation

$$L^*(u) = 0. \quad (9.1)$$

with

$$L^*(u) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} m^*(\eta_1) & - & - & - & - & m^*(\eta_p) & m^*(u) \\ Dm^*(\eta_1) & - & - & - & - & Dm^*(\eta_p) & Dm^*(u) \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ D^{p-1}m^*(\eta_1) & - & - & - & - & D^{p-1}m^*(\eta_p) & D^{p-1}m^*(u) \\ l^*(m^*(\eta_1)) & - & - & - & - & l^*(m^*(\eta_p)) & l^*(m^*(u)) \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

T being the determinant given in (8.4). This is clearly a differential equation of the n^{th} order in u , for which each one of the functions $y_j(z, \lambda)$ and $\eta_i(z, \lambda)$ is a solution. For if η_i is substituted for u two of the columns of the determinant (9.2) are the same, and if u is replaced y_j every element of the last column vanishes. Because the n solutions thus produced are linearly independent the solutions of the equation (9.1) are completely known.

The co-factor of the element $l^*(m(u))$ in the formula (9.2) is the determinant T . The expansion of the formula thus gives it the aspect

$$L^*(u) = l^*(m^*(u)) - \sum_{v=1}^p \frac{T_v}{T} D^{p-v} m^*(u), \quad (9.3)$$

where T_v is the determinant that is obtainable from the formula (8.4) by replacing its elements $D^{p-v} m^*(\eta_j)$ by $l^*(m^*(\eta_j))$.

From the formula (8.5) it is seen that

$$l^*(m^*(\eta_j)) = \lambda^n \sum_{v=1}^p \frac{\tau_v(z, \lambda)}{\lambda^r} \cdot \frac{D^{\mu-1} v_j}{\lambda^{\mu-1}} \quad (9.4)$$

with

$$\tau_v(z, \lambda) = \sum_{k=0}^p \bar{\beta}_k(z, \lambda) \sigma_{v,r}^{(p-k)}(z, \lambda). \quad (9.5)$$

The replacements which change T to T_v are thus seen to be ones which replace

$$\lambda^{n-v} \left\{ \delta_{p-v, j} + \frac{\sigma_{j, r}^{(p-v)}}{\lambda^r} \right\} \quad \text{by} \quad \lambda^n \frac{\tau_v}{\lambda^r}.$$

It follows that

$$\frac{T_v}{T} = \lambda^v \frac{\theta_v(z, \lambda)}{\lambda^r},$$

with some function $\theta_v(z, \lambda)$ which is bounded over the z and λ domains. This gives to the relation (9.3) the form

$$L^*(u) = l^*(m^*(u)) - \frac{1}{\lambda^r} \sum_{v=1}^p \lambda^v \theta_v D^{p-v} m^*(u). \quad (9.7)$$

With the substitution of the expression for $D^{p-v} m^*(u)$, as it may be obtained from (4.3) by writing $\bar{\gamma}_{i-s}$ in the place of γ_{i-s} , it is found that

$$L^*(u) = l^*(m^*(u)) - \frac{1}{\lambda^r} \sum_{j=1}^n \lambda^j \omega_j(z, \lambda) D^{n-j} u, \quad (9.8)$$

with

$$\omega_j(z, \lambda) = \sum_{v=1}^p \sum_{s=0}^p \lambda^{-s} \binom{p-v}{s} \theta_v D^s \bar{\gamma}_{\mu-v-s}.$$

A comparison of this with the earlier result (6.6) shows that

$$L^*(u) = L(u) - \frac{1}{\lambda^r} \sum_{j=1}^n \lambda^j \{ \varepsilon_j(z, \lambda) + \omega_j(z, \lambda) \} D^{n-j} u. \quad (9.9)$$

The equation (9.1), whose solutions are completely known, thus has coefficients which differ from those of the given equation (2.1) only by terms that are of at least the r^{th} degree in $1/\lambda$. It is, therefore, by definition, a related equation.

REFERENCES

- [1] R. E. LANGER, The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 67 (1949), pp. 461-490.
- [2] R. W. MCKELVEY, The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 79 (1955), pp. 103-123.