1. Die Gruppen $\Pi_n(A,B)$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

werden. Die angedeuteten allgemeinen Resultate, die neues Licht auf die Beziehungen zwischen Homologie und Homotopie werfen, haben vor allem die Gestalt exakter Folgen und damit verknüpfter Isomorphismen, welche alle die $\Pi(A, B)$ oder von ihnen abgeleitete Gruppen betreffen, und von diesen ist im folgenden die Rede. Sie sind in Zusammenarbeit mit P. J. Hilton entwickelt worden und grösstenteils an anderer Stelle ausführlich dargestellt [1, 2, 4].

1. Die Gruppen $\Pi_n(A, B)$.

Die Menge $\Pi(A, B)$ besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich A — d.h. bei festem B als Funktor von A — falls B ein gruppenähnlicher Raum ist (d.h. ein Raum mit einer Multiplikation m: $B \times B \to B$, welche bis auf Homotopie die Gruppenaxiome erfüllt), und nur in diesem Falle. Sie besitzt eine natürliche Gruppenstruktur bezüglich B bei festem A, wenn A mit einer Comultiplikation versehen ist, d.h. mit einer Abbildung m': $A \to A \vee A$ mit den dualen Axiomen (vgl. [1]). Dies ist insbesondere der Fall für $B = \Omega Y$, den Schleifenraum von Y, oder für $A = \Sigma X$, die Suspension von X. Zwischen $\Pi(\Sigma X, Y)$ und $\Pi(X, \Omega Y)$ besteht eine natürliche, d.h. mit allen Abbildungen verträgliche Isomorphie, und man kann diese Gruppen ohne Schaden identifizieren; durch Iteration erhält man die Gruppen

$$\Pi_n(A, B) = \Pi(\Sigma^n A, B) = \Pi(\Sigma^{n-k} A, \Omega^k B), \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$, wobei es für $1 \leqslant k \leqslant n-1$ gleichgültig ist, welche der gruppenbildenden Strukturen man verwendet. Sie sind covariante Funktoren von B, contravariante von A; für $n \geqslant 2$ sind sie stets Abelsche Gruppen [1]. Wählt man für A die Sphäre S_{m-n}, so ist $\Pi_n(A, B) = \pi_m(B)$ die m-te Hurewicz'sche Homotopiegruppe; wählt man für B den Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, m+n)$, wo G eine Abelsche Gruppe ist, so ist $\Pi_n(A, B) = H^m(A; G)$ eine homotopisch definierte Cohomologiegruppe, die für Polyeder A mit der üblichen (etwa der singulären) übereinstimmt, wie man z.B. von der Erweiterungstheorie der Abbildungen her weiss.

Eine Abbildung $\beta : B \to B'$ induziert Homomorphismen $\beta_* : \Pi_n(A, B) \to \Pi_n(A, B')$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; diese lassen sich verknüpfen durch „relative" Gruppen $P_n(A, B)$ und eine *exakte* Sequenz (Definition der P_n sowie von J und ∂ vgl. [1, 3])

$$\ldots \to \Pi_n(A, B) \xrightarrow{\beta_*} \Pi_n(A, B') \xrightarrow{J} P_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, B) \to \ldots;$$

wir fassen diese in evidenter Weise in ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} \Pi_*(A, B) \arrow[rr, "\beta_*"] & & \Pi_*(A, B') \arrow[dl, "J"] \\ & P_*(A, \beta) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

zusammen, wobei Π_* bezw. P_* die direkte Summe der Π_n bezw. P_n ist und β_* und J als Homomorphismen vom Grade 0, ∂ vom Grade —1 aufzufassen sind. Für die relative Gruppe $P_*(A, \beta)$, die zum Testraum A und zur Abbildung β gehört, gilt die *Exzisionseigenschaft* für Faserungen, wie sie im Spezialfall der π_n wohlbekannt ist: Ist β eine Faserabbildung (im Sinne des „covering homotopy theorem") mit Faser B_0, so hängt $P_*(A, \beta)$ nur von B_0 ab; das exakte Dreieck ergibt dann einen natürlichen Isomorphismus vom Grade —1

$$P_*(A, \beta) \cong \Pi_*(A, B_0) .$$

Die duale Betrachtung — fester Raum B und Abbildung $\alpha : A \to A'$ — ergibt analog relative Gruppen $P_n(\alpha, B)$ und ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd} \Pi_*(A', B) \arrow[rr, "\alpha^*"] & & \Pi_*(A, B) \arrow[dl, "J"] \\ & P_*(\alpha, B) \arrow[ul, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

sowie einen Exzisionsisomorphismus vom Grade —1 für Cofaserungen α (d.h. Abbildungen $\alpha : A \to A'$ mit „homotopy extension property", $A'/\alpha(A) = A_0$ heisst dann die Cofaser von α)

$$P_*(\alpha, B) \cong \Pi_*(A_0, B) .$$

Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem A

(I) Exaktheit für Abbildungen $\beta : B \to B'$ und passende relative Gruppen $P_*(A, \beta)$,

(II) Exzision für Faserungen;

bei festem B

(I′) Exaktheit für Abbildungen $\alpha : A \to A'$ und passende relative Gruppen $P_*(\alpha, B)$,

(II′) Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bezw. (III′), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus β_* bezw. α^* induzieren. Die Gruppen $\Pi_*(A, B)$ verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum* B oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum* A, wobei eine Unterscheidung für die „absoluten" Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von A bezw. B —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume B, vgl. Abschnitt 3.

2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.

Sind β_1 und β_2 Abbildungen, $\beta_1 : B_1 \to B'_1$, $\beta_2 : B_2 \to B'_2$, so versteht man unter einer Abbildung $\Phi : \beta_1 \to \beta_2$ ein Paar von Abbildungen $\varphi : B_1 \to B_2$ und $\varphi' : B'_1 \to B'_2$ derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung Φ induziert Homomorphismen $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \to P_n(A, \beta_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, die sich wiederum durch passende relative Gruppen "zweiter Stufe"