

# L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE COMME PRÉPARATION A L'ANALYSE

Autor(en): **Delessert, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37957>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE COMME PRÉPARATION A L'ANALYSE<sup>1)</sup>

par A. DELESSERT

1. La Commission internationale pour l'Enseignement des Mathématiques s'est déjà occupée de la géométrie. On peut donc se demander s'il est opportun de revenir sur la question au cours d'un séminaire principalement consacré à l'analyse. Pour justifier l'intrusion de cette petite causerie, on peut remarquer que l'enseignement élémentaire a déjà une tendance très accentuée au cloisonnement. Sans doute est-il commode de découper le domaine mathématique en régions plus restreintes. Cela permet d'adopter des terminologies plus concrètes et de s'attaquer à des phénomènes plus particuliers. Toutefois, on risque ainsi de voir se développer parallèlement des théories mal coordonnées, alors qu'il est essentiel que ceux qui enseignent ne perdent pas de vue l'unité des mathématiques; ils doivent tenir compte du fait que la démarche mathématique ne s'appuie que sur un nombre relativement petit de structures, qui, par leur nature même, apparaissent dans toutes les parties des mathématiques. Ainsi la géométrie ne saurait être enseignée pour elle-même. On peut donc raisonnablement étudier dans quelle mesure l'enseignement de la géométrie peut servir celui de l'analyse.

Un examen même superficiel montre immédiatement que le titre de mon exposé recouvre des problèmes plus vastes qu'il n'y paraît d'abord. Pour le traiter convenablement, il conviendrait de dégager les caractères d'un bon enseignement de l'analyse, ce qui est l'objet de la présente réunion. Il faudrait en avoir fait autant pour la géométrie, ce qui a été examiné à un précédent séminaire. Il faudrait enfin passer en revue les apports qu'un bon enseignement de la géométrie peut fournir à un bon enseignement de l'analyse, ce qui pourrait constituer la matière

---

<sup>1)</sup> Conférence donnée au Séminaire organisé par la C.I.E.M. à Lausanne, le 26 juin 1961.

d'un troisième séminaire ! Je suis donc obligé de borner assez étroitement mon sujet. D'abord je désignerai par « géométrie » la géométrie euclidienne à deux ou trois dimensions, avec une certaine prédilection peut-être pour la géométrie plane. Je ne m'intéresserai d'autre part qu'à la première initiation à l'analyse, celle que les élèves reçoivent avant d'entrer à l'Université. Enfin je ne me proposerai pas d'épuiser tous les points susceptibles d'entrer en considération.

Pour y voir plus clair, essayons de dresser une liste des notions fondamentales qui apparaissent nécessairement dans un cours d'analyse. Nous pouvons noter :

1. Quelques éléments sur les ensembles, particulièrement les ensembles infinis.
2. Quelques structures algébriques.
3. La notion de nombre réel.
4. La notion de fonction.
5. Quelques notions topologiques; désignation vague par laquelle on entend, en particulier:
  - a) la notion d'espace topologique;
  - b) la notion de limite (limite d'une suite de nombres réels, limite d'une fonction de variable réelle ou d'une fonction définie sur un ensemble plus général);
  - c) la notion de continuité d'une fonction de variable réelle (en un point, dans un intervalle ouvert, etc.).

Ces points sont tous repris en leçons d'analyse, mais plusieurs d'entre eux apparaissent bien avant.

2. Considérons le premier point de notre liste. Tout le monde admet actuellement qu'il convient de posséder un minimum de connaissances sur les ensembles lorsqu'on aborde l'analyse. Les notions de relation, d'application, d'ensemble produit, par exemple, permettent de préciser et d'alléger bien des énoncés et des démonstrations. Mais, lorsqu'on demande sous quelle forme cette initiation doit se faire, on voit se constituer deux partis. Pour les uns, la théorie des ensembles est un objet d'étude en soi,

que l'on doit exposer en y mettant certaines formes, bien entendu, et en s'entourant de précautions d'ordre pédagogique. Pour les autres, la technique des ensembles constitue essentiellement un recueil d'expressions et de notations commodes qu'on introduit dès que les possibilités d'usage se révèlent suffisamment nombreuses et consistantes, et qu'elles réalisent une véritable économie de pensée. Je vois quelques raisons de préférer la seconde manière de faire.

On sait que la théorie des ensembles permet d'énoncer un certain nombre de paradoxes assez réjouissants. Elle en présente quelques-uns de plus lorsqu'on se met en devoir de la mettre à la portée des enfants. En théorie mathématique des ensembles, on fait abstraction du fait que les éléments d'un même ensemble sont caractérisés par une même propriété. En bonne doctrine, le terme d'« ensemble » n'est qu'un mot dont le rôle grammatical est fixé par des axiomes. C'est là une situation bien commune en mathématiques. Aussi, lorsqu'on veut « faire de la théorie des ensembles » avec des enfants, on s'efforce de leur suggérer l'idée de collections d'objets ne possédant *a priori* aucune propriété particulière. Dans ce dessein, on multiplie des exemples d'une bizarrerie croissante dont le paroxysme semble atteint lorsqu'on réunit dans une même liste finie des objets aussi disparates que la lune, le chiffre deux et le nez d'un notaire, la présence de ce dernier objet (qui n'est d'un usage courant que chez les notaires) semblant indiquer que l'on ne se borne pas essentiellement aux ensembles mathématiques. Pour être objectif, il faut toutefois noter que l'ensemble des exemples n'est pas pris comme exemple. Enfin, tous ces efforts ne font qu'affermir les élèves dans leur conviction première, à savoir que tout ensemble est défini par une propriété caractérisant ses éléments. On ne saurait évidemment exiger d'eux qu'ils extraient facilement d'une série d'exemples présentant tous un même caractère une notion idéale ayant le caractère juste opposé. L'ambiguïté essentielle repose sur la confusion presque inévitable entre « ensemble concret » et « ensemble mathématique ». Il est si difficile d'y échapper que, dans un projet d'exposé de la théorie des ensembles rédigé par un comité d'experts hautement qualifiés réunis par l'O.E.C.E., on peut lire ceci (dans la traduction

française que j'ai consultée): « Il n'y a qu'un seul ensemble vide: il est en effet impossible de former deux ensembles vides tels qu'un élément de l'un ne soit pas élément de l'autre »; et un peu plus loin, à titre d'exercice: « Donner des exemples d'ensembles vides ». Notons encore que, dans beaucoup d'exposés de ce genre, la plupart des exemples et des exercices proposés concernent les ensembles finis.

En contre-partie, examinons la contribution que peut apporter la géométrie élémentaire à la théorie des ensembles. Au moment où les élèves abordent l'analyse, il est essentiel qu'ils sachent raisonner convenablement sur des ensembles infinis et qu'ils conçoivent clairement des notions telles que celles d'ensemble produit, ou d'ensemble des parties d'un ensemble donné. L'expérience montre qu'un tel résultat peut être atteint d'une manière particulièrement satisfaisante et naturelle lorsqu'on introduit le plan comme un ensemble de points. Les figures sont alors les parties du plan, la figure vide se révélant rapidement indispensable. A partir de quelques figures simples comme les droites et les demi-plans fermés, on peut engendrer par réunion et par intersection des figures très variées dont on n'exploite d'ordinaire qu'une trop petite partie. Les demi-plans ouverts, les réseaux de points sont des figures très intéressantes. Il se révèle fructueux de définir une figure convexe comme l'intersection d'une famille de demi-plans. On peut d'ailleurs encore monter à l'échelle d'ensembles construite sur le plan. Le produit du plan par lui-même conduit à la notion de segment orienté, plus commode et plus correcte que celle de « vecteur » que l'on voit paraître intempestivement au début de la géométrie élémentaire. D'autre part, on voit surgir à profusion des relations d'équivalence ou des relations d'ordre.

Dans ces conditions, il est naturel d'adopter les notations et la terminologie relatives à la notion d'application. Cela permet d'énoncer correctement les propositions concernant ce qui fait l'essentiel de la géométrie élémentaire: les isométries, les projections, les similitudes, etc. La possibilité d'appliquer un demi-plan dans lui-même par une translation non banale de direction perpendiculaire à sa frontière permet d'approcher la propriété essentielle des ensembles infinis.

Peut-être ai-je un peu trop longuement développé ces remarques. Mais il m'a paru intéressant de mettre en opposition deux façons essentiellement différentes de présenter un même chapitre mathématique; la première, que l'on pourrait appeler l'« administration brutale », consiste à exposer une théorie mathématique comme telle, en faisant apparaître simultanément les notions générales et les exemples destinés à les illustrer; par la seconde, on construit un modèle cohérent de la théorie considérée. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, mais on peut d'ores et déjà considérer cet exposé comme un plaidoyer en faveur de la seconde méthode.

3. Ne nous attardons pas trop sur l'apport de la géométrie à l'élaboration de quelques structures algébriques essentielles, particulièrement celles de groupe, de corps et d'espace vectoriel. Le plan et les transformations planes étant introduits comme nous l'avons dit plus haut, il est naturel d'introduire le produit de deux transformations. On peut même en faire un ressort essentiel lorsqu'on engendre systématiquement les isométries planes à partir des symétries axiales, par exemple. On peut dès lors adopter les notations et les expressions qui conviennent aux groupes. Le moment venu, il sera naturel et facile d'introduire la notion de groupe abstrait, qui aura été illustrée d'avance par des exemples très variés ne concernant pas uniquement des groupes finis ou abéliens, comme c'est trop souvent le cas dans l'administration brutale de la notion de groupe. Puis on mettra en évidence les caractères des espaces vectoriels en étudiant l'ensemble des translations du plan.

Tout cela implique évidemment certaines servitudes dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Par exemple, on sera amené à introduire très tôt la notion d'application identique et celle de transformation étendue à tout le plan, qui ne sont pas conçues spontanément par les jeunes enfants. Plus généralement, lorsqu'on parle de mouvement, de déplacement, il faut distinguer le sens que le géomètre donne à ces mots et celui que leur prête le mécanicien. En échange, la pratique d'un certain langage algébrique introduit une grande cohérence dans la théorie. De plus, l'habitude de penser aux isométries ou aux

similitudes prises dans leur ensemble fait naître une idée très importante : celle d'invariant vis-à-vis d'une famille de transformations.

4. Considérons alors la notion de nombre réel. On sait que toute géométrie euclidienne suppose l'existence d'un corps de base dans lequel on prélève les nombres dont on a besoin pour évaluer les rapports de section, par exemple. Autant que possible, on se sert des fractions ordinaires, dont le rôle quasiment surnaturel apparaîtra bientôt. Mais, lorsqu'on aborde la similitude, on ne peut plus se contenter des nombres rationnels ; de sorte que même celui qui a décidé d'enseigner la géométrie élémentaire en évitant soigneusement de parler des faits essentiels se voit dans l'obligation de penser au domaine des nombres dont il se sert. Bien que l'on puisse faire autrement, on opte généralement pour l'ensemble des nombres réels. On peut donc se demander quelles sont les connaissances que possèdent les élèves sur la droite réelle au moment où ils en ont besoin en géométrie.

Ces connaissances, ils les ont acquises dans les leçons de calcul — ou d'arithmétique, comme on dit parfois. Mais là, on les a rarement placés devant des problèmes mathématiques, des questions d'algèbre, comme le mot « calcul » pourrait le suggérer. On les a dressés à résoudre des exercices de physique, de comptabilité ou encore d'épicerie, à comparer des robinets mal réglés et des trains de marchandises stupidement lents. Pour nous exprimer plus clairement et au risque de simplifier un peu, nous dirons que le mathématicien chimiquement pur est un personnage qui crée ou dégage des notions idéales qu'il associe par des opérations intellectuelles. A l'opposé, le praticien manipule des objets matériels qu'il associe suivant des lois naturelles ou des règlements concrets. Placés entre eux, le technicien ou le physicien observent et utilisent les parentés mystérieuses existant entre certaines opérations du mathématicien et celles du praticien. Ils essaient de déterminer les conditions dans lesquelles on peut utiliser les « isomorphismes locaux » qu'ils découvrent entre les notions idéales du mathématicien et celles, toutes matérielles, du praticien. C'est là également le champ d'activité des mathématiques appliquées ; il exige, me semble-t-il, une maturité intellec-

tuelle qui dépasse presque toujours celle des enfants. On voit de très jeunes mathématiciens de valeur; le sens pratique n'attend pas le nombre des années et tout enfant de plus de douze ans qui n'a pas fait sauter la moitié du domicile familial au cours d'expériences de chimie amusante devrait être mis en observation. Mais on trouve très rarement de petits prodiges en mathématiques appliquées.

C'est pourtant ce qu'on exige généralement de nos jeunes élèves. Plus, on commet la seule faute vraiment irréparable qui consiste à confondre le domaine idéal du mathématicien et le domaine des objets concrets du praticien. Nous en avons déjà vu un exemple au sujet de la théorie des ensembles. Mais nous allons en observer un autre: c'est la définition que l'on donne aux enfants de la multiplication ordinaire. La multiplication est une addition abrégée, dit-on. Et pour l'illustrer on énonce ceci:

4 pommes + 4 pommes + 4 pommes font 12 pommes  
ce que l'on abrège en mettant:

$$3 \text{ fois } 4 \text{ pommes} = 12 \text{ pommes}$$

C'est ce que nous appellerons la « définition potagère » de la multiplication. Je vous laisse deviner avec quelle aisance il est possible de tirer de là la commutativité de la multiplication! Après quoi l'on passe à la division. Mais on voit apparaître deux espèces de divisions, suivant que, connaissant 12 pommes, on désire retrouver « 3 fois » ou « 4 pommes ». On assiste ainsi à la naissance d'objets complexes formés d'une partie numérique et d'une partie descriptive appelée « unités », le tout étant baptisé valeur, quantité, grandeur, nombre ou encore mesure, suivant les circonstances et pour éviter des répétitions. Certaines de ces quantités, qu'un sort injuste a privées de leurs unités, sont appelées des nombres purs. Les densités, par exemple, sont des nombres purs; mais la réciproque n'est pas vraie, ce qui implique des nuances dans la pureté. En effet, parmi les nombres purs, il en existe de curieux, que nous avons déjà rencontrés: les nombres de fois, qui ne sauraient être qu'entiers. Seul un miracle pourrait nous permettre de continuer à calculer librement avec ces maudits nombres qui s'obstinent à rester entiers. Or ce miracle



existe: ce sont les fractions ordinaires. Il est vrai qu'abusant de leur caractère miraculeux, les fractions ordinaires se comportent bizarrement. En plus de quelques propriétés algébriques, elles présentent certaines exigences affectives un peu capricieuses, de sorte qu'au lieu de les étudier, on a plutôt l'impression de les apprivoiser. Ainsi, les fractions  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{6}$ , ... sont égales, en principe; mais l'une d'elles est plus égale que les autres: c'est  $\frac{2}{3}$ , à qui l'on doit donc le plus grand respect. De même, lorsqu'on veut additionner deux fractions ordinaires, il convient de les réduire au même dénominateur; mais il est parfaitement déshonorant de ne pas prendre le plus petit. Ce chapitre des fractions ordinaires est un tel cauchemar pour tout le monde que, par la suite, on évite soigneusement de parler de quoi que ce soit qui ressemble à une fraction. Lorsque, bien plus tard, on aborde la notion de rapport ou celle de fonction rationnelle, il suffit au maître d'affirmer que ces choses se comportent comme les fractions ordinaires pour convaincre chacun qu'il est opportun de clore la discussion.

Cet exemple montre l'accumulation d'incohérences que l'on provoque en partant d'une ambiguïté. La définition potagère de la multiplication consacre la confusion du domaine des nombres et du domaine des objets matériels. Il résulte de là que la notion de nombre, particulièrement celle de nombre réel, n'est pas convenablement dégagée dans l'enseignement élémentaire du calcul, pas plus que l'idée de mesure, d'ailleurs. Comment y remédier? Sans reprendre dans son ensemble le problème de l'enseignement du calcul, on peut proposer d'insister moins sur les fractions ordinaires et davantage sur la notion de nombre réel. On peut adopter pour cela une solution particulièrement heureuse préconisée, il y a bien des années déjà, par Henri Lebesgue. Elle consiste à faciliter l'apparition et l'utilisation des développements décimaux illimités. L'approximation d'un nombre réel par des développements décimaux limités permet d'aborder assez tôt quelques-uns des problèmes essentiels touchant la structure topologique de la droite réelle. Les démonstrations que l'on pourra donner ainsi seront bonnes. En revanche, les faits que l'on passera sous silence ne dissimuleront pas de paradoxes.

La contribution de la géométrie consiste d'abord à faire usage, lorsque c'est utile, des nombres réels représentés par des développements décimaux illimités. Je pense, en particulier, au théorème de Thalès, où trop souvent l'on ne donne une démonstration complète que lorsque les segments à comparer sont commensurables. Lorsqu'ils ne le sont pas, on suggère évasivement de les découper en morceaux de plus en plus petits et de recommencer le raisonnement indéfiniment. La seule pensée de faire quelque chose indéfiniment éveille une si vive répugnance chez tous les élèves normaux que l'on parvient sans trop de peine à leur faire admettre que la démonstration est achevée.

Dans le même ordre d'idées, la deuxième contribution importante de la géométrie concerne la notion de mesure. La considération des mesures physiques, qui intervient si souvent dans les problèmes de calcul élémentaire, présente des difficultés. Les élèves saisissent assez bien l'addition et la multiplication des nombres; en revanche, ils réalisent plus difficilement des mécanismes par lesquels on peut additionner des vitesses ou les multiplier par des scalaires. Or la mesure établit une correspondance entre ces deux ordres de faits; elle ne peut être conçue clairement tant que l'un des termes de la relation reste obscur. La géométrie élémentaire permet d'examiner le phénomène de la mesure à l'état pur, si l'on peut dire. Lorsqu'on étudie la notion d'aire, par exemple, il est facile de mettre en correspondance l'addition des nombres réels d'une part, et l'opération graphique par laquelle on substitue un carré équivalent à la réunion de deux carrés disjoints donnés. On est alors amené à préciser l'ensemble des constructions admissibles afin d'étudier les opérations algébriques susceptibles d'être matérialisées par des opérations graphiques. Il est généralement commode de choisir la règle et le compas comme instruments de dessin et d'en fixer l'usage par des axiomes adéquats. La présentation axiomatique de la géométrie prend alors une forme plus constructive et, par suite, plus accessible aux élèves.

5. Il n'y a pas lieu de s'attarder sur l'apport de la géométrie élémentaire à l'idée de fonction. Cette notion apparaît déjà très clairement en leçon de calcul, bien que les exemples rencon-

très concernent trop souvent des fonctions définies sur des ensembles non mathématiques imprécis. En géométrie, au contraire, les fonctions considérées se présentent sous une forme à la fois plus correcte et plus générale. Ce ne sont pas uniquement des fonctions d'une variable réelle; elles sont parfois définies dans le plan (distance d'un point variable à une droite donnée), dans le produit du plan par lui-même (distance) ou sur des ensembles plus compliqués encore (aire, rapport de section).

6. Nous parvenons au dernier point de notre énumération, qui concerne les notions topologiques. La contribution de la géométrie élémentaire s'y révèle aussi importante que pour les points précédents. Néanmoins elle est un peu plus difficile à dégager, car elle se manifeste par des nuances, la manière d'aborder certaines questions ou la nature de certains exercices, plutôt que par des exposés systématiques. Pourtant il serait très facile de « faire de l'analyse » en géométrie élémentaire, car son domaine naturel est un espace métrique; on peut d'ailleurs faire apparaître d'autres espaces analogues, en considérant par exemple l'ensemble des cercles muni d'une distance convenable. On pourrait alors étudier les isométries, les similitudes, les projections ou les inversions sous le rapport de la continuité. Mais cela reviendrait à s'orienter prématurément, me semble-t-il, vers la topologie.

En fait, on s'arrange presque toujours à réduire au minimum l'intervention des faits topologiques en géométrie élémentaire. Il faut reconnaître que les tentatives inverses ne sont pas toujours très heureuses. Je me souviens d'avoir étudié la géométrie élémentaire dans un ouvrage où l'on établissait ainsi l'existence des angles droits: on considérait une demi-droite  $Pa$  tournant autour d'un point  $P$  pris sur une droite donnée  $dd'$ ; pour certaines positions de  $Pa$ , l'angle  $Pad$  était plus grand que l'angle  $Pad'$ ; pour d'autres, c'était le contraire; il y avait donc « obligatoirement » — ou peut-être était-ce « fatalement », je ne sais plus — une position pour laquelle ces angles étaient égaux. C'était notre bonne vieille continuité qui se dissimulait derrière le masque de la Loi Morale ou du Destin.

Cependant il existe une notion analytique qui apparaît en

géométrie élémentaire: c'est celle de limite. La limite d'une suite de nombres réels apparaît dans diverses démonstrations du théorème de Thalès ou dans l'évaluation de l'aire du cercle; la limite d'une fonction de variable réelle peut être évoquée lorsqu'on étudie le rapport de section d'un point variable sur un segment donné; la limite d'une fonction définie sur un ensemble de partitions apparaît dans l'étude du volume du tétraèdre. Tous ces exemples peuvent être traités convenablement lorsqu'on se sert de la représentation des nombres réels par des développements décimaux illimités. Il est vrai que l'on peut éventuellement se passer de la notion de limite en introduisant sous forme d'axiomes certains résultats qu'elle permet d'obtenir. Il me semble que ce n'est pas souhaitable et qu'au contraire, il convient de profiter des occasions offertes pour poser de solides jalons en direction d'une notion analytique essentielle qui sera reprise plus tard.

Il nous reste alors à examiner comme la géométrie peut préparer l'apparition de la notion essentielle de l'analyse: celle d'espace topologique. Il faudrait pour cela passer en revue les difficultés d'ordre « psychologique » que rencontre celui qui aborde cette notion. Sans prétendre épuiser l'énumération de ces points délicats, j'en vois surtout deux. Il faut noter d'abord l'apparition d'ensembles inhabituels, qui ne correspondent à aucune expérience de la vie courante: ensembles ouverts, ouverts et fermés, ni ouverts ni fermés, ensembles complémentaires partout denses, etc. On peut en montrer en géométrie élémentaire déjà, qui peuvent être considérés d'assez près, sans adopter ouvertement le point de vue topologique. Signalons les demi-plans ouverts ou fermés, les disques ouverts ou fermés, l'image par inversion ou par projection sur une droite des points d'un réseau, l'ensemble des images itérées d'un point par une rotation. Le second point que je noterai me paraît plus important encore. Il concerne une situation qui pourrait peut-être caractériser la démarche analytique; d'une manière vague, on la décrirait ainsi: dans un ensemble donné et par un procédé bien déterminé appliqué à une famille de parties de même nature, on fait surgir un sous-ensemble de nature essentiellement différente. Pour fixer les idées, on peut demander aux élèves de prouver

qu'un demi-plan fermé est l'intersection des demi-plans ouverts qui le contiennent. On peut établir la convexité d'un disque fermé en montrant qu'il est l'intersection d'une famille de demi-plans ouverts ou fermés. On peut encore considérer l'intersection de tous les disques contenant deux points distincts  $A$  et  $B$ . On est alors conduit à montrer que, quel que soit le point  $P$  n'appartenant pas au segment  $AB$ , on peut trouver un disque contenant  $A$  et  $B$ , mais pas  $P$ . Ce type de raisonnement, si fréquent en analyse et qui apparaît ici isolément, a des chances d'être facilement compris par les élèves. Et c'est autant de gagné pour eux qui sont généralement surpris, au moment où ils abordent l'analyse, par l'accumulation des phénomènes et des procédés nouveaux.

7. Je bornerai ici l'examen des points où la géométrie élémentaire et surtout la manière de l'enseigner sont susceptibles de servir l'analyse. Bien d'autres questions pourraient être abordées, comme celles d'erreur, d'approximation ou encore de probabilité géométrique. Si peu convaincant que puisse être le présent exposé, il me semble qu'en développant les remarques que nous avons faites on peut montrer que celui qui enseigne la géométrie élémentaire est en mesure d'accumuler des expériences précieuses et solides en vue de l'analyse. La géométrie a tout à y gagner. Elle cesse d'être une discipline fermée: elle prépare l'accès à des domaines plus vastes. Par parenthèse, elle nécessite un corps enseignant bien formé, aimant les mathématiques vivantes et disposé à rafraîchir constamment son information. D'autre part, il est bon que le professeur d'analyse sache qu'il peut compter sur un fonds commun d'expériences préalables. Celles-ci pourront se couler dans les moules constitués par les structures analytiques parfois un peu arides pour les débutants. Le choix d'un type particulier d'exposé pour l'analyse se révèle alors moins dramatique, puisque derrière les mots utilisés se dessine un arrière-plan d'impressions communes. Tandis que lorsque deux professeurs adoptent deux axiomatiques très différentes pour présenter l'analyse à leurs élèves non prévenus, on peut presque dire qu'ils enseignent deux matières différentes, ce qui justifie amplement leurs querelles éventuelles.

Disons en bref que l'enseignement de l'analyse commence bien avant de figurer officiellement aux programmes.

8. Au risque d'abuser de votre patience, je voudrais encore formuler une observation d'une portée plus générale et qui me paraît impliquée par ce qui précède.

Depuis plusieurs années, on assiste à une remise en question de l'enseignement mathématique élémentaire. On lui reproche de s'être fossilisé, de s'être constitué en une discipline autonome sans liens avec les mathématiques vivantes. Lorsqu'on présente ces critiques au corps enseignant, on peut observer d'abord un durcissement de son attitude. Pour répondre à des remarques d'ordre mathématique, les maîtres avancent des arguments pédagogiques, qui, comme par hasard, vont juste en sens contraire. Puis on voit apparaître ce que j'appellerai la « réaction primaire » au sens où l'entendent les psychologues, qui consiste à rejeter en bloc tout ce qui s'est fait jusqu'ici, puis à prendre presque textuellement quelques-uns des chapitres initiaux de tel ou tel traité moderne écrit par des mathématiciens professionnels à l'intention de mathématiciens déjà formés. Sans doute s'entoure-t-on de précautions oratoires : il ne faut pas aller trop vite, il faut donner beaucoup d'exemples. Il n'en reste pas moins que l'on tente d'inculquer, à titre d'initiation, des formalismes qui ont été conçus par et pour des individus ayant un passé mathématique lourd d'expériences. Il faudrait préciser et circonstancier les critiques que je formule. Mais on peut remarquer avec étonnement que bien des tenants de cette forme d'enseignement persistent à confondre les domaines mathématique et pratique, de sorte qu'ils tombent dans les défauts essentiels de l'ancien système. La mode change, mais on fait encore des mathématiques scolaires, en marge des mathématiques vivantes.

Reste la « réaction secondaire ». Elle consiste à reprendre dans les anciens exposés tout ce qui est susceptible d'être présenté sous une forme mathématique acceptable, à en tirer des modèles fournissant des sujets d'expériences variées, cohérentes et approfondies. Après cela seulement, on apporte des schémas mentaux, des structures susceptibles de coordonner ces expériences, d'en simplifier la description et de les dépasser pour

atteindre de nouveaux modèles sur lesquels on recommencera le processus. Le même objet mathématique apparaîtra à plusieurs reprises, vu chaque fois d'un peu plus haut, comme nous avons tenté de le montrer ici pour les nombres réels et pour diverses structures algébriques et topologiques.

Je risque ici une image un peu osée. L'ancien enseignement affirmait que l'édifice mathématique a bien plusieurs étages, mais que seul le rez-de-chaussée lui était réservé; l'accès aux étages supérieurs n'est possible qu'à des êtres privilégiés pratiquant la lévitation. L'enseignement correspondant à ce que j'ai appelé la « réaction primaire » prétend que l'édifice mathématique n'a pas de rez-de-chaussée, ou plutôt que celui-ci est définitivement clos; pour parvenir aux étages supérieurs, il faut se servir d'une corde à nœuds; on prend des précautions, toutefois: on met beaucoup de nœuds. L'enseignement obéissant à la « réaction secondaire » propose de monter aux étages en empruntant l'escalier, comme dans toute maison honorable.

J'ai essayé de montrer ici que, pour se rendre à l'étage de l'analyse, il est parfaitement concevable de passer par l'escalier de la géométrie élémentaire.

Université de Lausanne.