

Quelques caractères de l'œuvre de Bourbaki en Analyse

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

problème arithmético-algébrique. Un tel problème, plus général, peut être plus facilement résoluble; l'histoire des mathématiques montre en effet abondamment qu'un niveau convenable de généralité s'accompagne souvent d'une plus grande souplesse et dégage les ressorts secrets des démonstrations.

Il importe toutefois de ne pas tomber dans le travers consistant, lorsqu'on ne sait pas résoudre un problème, à résoudre des problèmes voisins plus faciles, et à croire qu'on a fait progresser la question initiale; de tels essais sont d'excellents travaux d'approche, mais il est souvent préférable de ne pas en imposer la lecture à autrui.

4. *Création de structures soumises à des exigences données.*

L'industrie construit maintenant, à la demande, des machines-outils capables de réaliser tel travail complexe; on est proche du jour où la chimie saura synthétiser les fibres-textiles satisfaisant à telle exigence du consommateur; en mathématiques, la théorie des catégories permet d'envisager maintenant la construction de structures possédant telles propriétés utiles dans telle question. L'état d'esprit du jeune mathématicien n'est plus en effet celui d'un constructeur en contact avec la matière. Il ne construit plus, de proche en proche, à partir de leurs éléments, les êtres complexes dont il a besoin; il impose seulement à ces êtres d'avoir des relations mutuelles données (et non contradictoires); ils constituent alors une catégorie qu'on étudie par une méthode régulière; la réalisation des éléments de la catégorie comme ensembles munis d'une certaine structure est l'un des derniers stades de la recherche.

QUELQUES CARACTÈRES DE L'ŒUVRE DE BOURBAKI EN ANALYSE

Nous avons examiné les outils et les principes; voyons maintenant la réalisation, dans l'œuvre collective ou personnelle des Bourbakistes.

1. *Axiomatique et multivalence.*

Conformément à ses principes, BOURBAKI manifeste une prédilection pour les structures multivalentes. Il aime les énoncés

généraux: « Quand ça ne coûte pas plus cher, on fait la théorie dans le cadre le plus général. » D'où économie de pensée, d'où aussi parfois un effort plus grand d'abstraction exigé du lecteur.

Ainsi, non seulement les espaces vectoriels sont étudiés sur un corps quelconque, mais partout où c'est possible, on remplace leur étude par celle des modules sur un anneau avec unité (ce qui oblige évidemment à adopter des définitions valables dans le cas général, par exemple celle du produit tensoriel). De même, les équations différentielles $x' = f(x, t)$ sont étudiées, non dans le cadre des espaces de dimension finie, mais dans celui des espaces normés, et $f(x, t)$ est seulement supposée lipschitzienne en x , et réglée en t ¹.

2. Bourbaki est essentiellement algébriste.

Ses promoteurs ont découvert l'algèbre auprès des grands algébristes allemands, à une époque où, en France, on ignorait l'algèbre moderne; aussi leur œuvre d'Analyse est-elle imprégnée d'algèbre et de notations algébriques: Algèbre des ensembles certes, mais aussi groupes, algèbre linéaire et multilinéaire, dualité. Ils ont le goût des transformations, des propriétés qui s'expriment sous forme de relation algébrique.

Lorsqu'une théorie, classiquement considérée comme de l'Analyse, peut s'algébriser, totalement ou en partie, le Bourbakiste ne résiste pas au plaisir de le faire.

Autrefois l'Analyse était essentiellement l'étude des fonctions définies sur R ou R^n et à valeurs dans R ou R^n , et des opérations de dérivation et d'intégration. Maintenant pour le Bourbakiste, R est avant tout un corps commutatif de caractéristique 0, et cela lui suffit souvent; lorsque c'est vraiment de R qu'il a besoin, il sait exactement qu'il lui suffit de tenir compte de son ordre et de sa locale compacité.

Entre les mains de C. CHEVALLEY, l'étude des groupes de Lie et des Algèbres de Lie se dégage de sa gangue; l'analyse n'y joue plus qu'un rôle restreint; elle sert seulement à établir l'existence d'êtres munis de telle propriété, ou à définir telle opération. Par

¹) Une fonction réglée de t est une limite uniforme de fonctions constantes par intervalles.

exemple on ne retient de la dérivation que son caractère d'application linéaire d'une algèbre dans elle-même, vérifiant l'identité $D(xy) = xD(y) + D(x)y$.

De même, avec H. CARTAN, la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes s'épure; l'intégration reste un outil de base, mais il en localise l'étude, en dégage les propriétés algébriques, qui seront les seules à être utilisées désormais. Dans sa « Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes », il adopte le point de vue de WEIERSTRASS plutôt que celui de CAUCHY, et dans le premier chapitre, il tire de l'étude algébrique des séries formelles le maximum d'information concernant leur composition, leur inversion et leur dérivation. Lorsqu'il étudie la théorie du potentiel, il donne la préférence aux outils algébriques: Formule de composition de noyaux, interprétation du balayage comme projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

3. *Renouvellement constant de l'œuvre.*

L'œuvre de BOURBAKI n'est pas un bilan du passé, mais une œuvre de jeunes; c'est une construction vivante en perpétuelle évolution et tournée vers l'avenir. BOURBAKI incorpore à son œuvre les développements, même récents, qui ont fait leurs preuves et, en fonction du développement de telle structure, revoit toutes les branches maîtresses (y découvrant parfois au passage des fruits succulents et inattendus). C'est ainsi que les fascicules anciens vont être remaniés en termes de catégories, sous forme implicite ou explicite; de même les espaces topologiques non séparés ont maintenant droit de cité, depuis qu'ils ont manifesté leur importance dans diverses théories, en particulier en géométrie algébrique; les équations aux dérivées partielles linéaires seront traitées en termes de distributions, de convolution, de transformation de Fourier et Laplace.

Certes BOURBAKI, tout polycéphale qu'il soit, a sur certains points des phobies irrationnelles: C'est ainsi qu'il s'est fait de la théorie de la mesure une conception intéressante, mais exagérément rigide en termes d'espaces localement compacts et de convergence vague; et il relègue au musée des horreurs les mesures abstraites, fermant ainsi à ses disciples les portes du calcul des

probabilités, qui n'a peut-être pas encore trouvé les meilleurs outils, mais manifeste actuellement une vitalité étonnante.

4. *Choix des définitions.*

La recherche des bonnes définitions est une partie essentielle de l'œuvre bourbakiste. On reproche parfois à cette œuvre son caractère trop formel et déductif: BOURBAKI pose les axiomes et en tire les conséquences, mais ne révèle pas la raison du choix de ces axiomes et des théorèmes qu'il démontre. C'est qu'en fait l'histoire de ces choix serait bien longue; quiconque a essayé de faire l'axiomatique d'une théorie jusque-là confuse sait que les bonnes définitions ne se trouvent qu'après de multiples essais avortés, dont il ne faut plus ensuite s'encombrer, car l'esprit, partagé entre plusieurs axiomatiques voisines, s'affaiblit et perd son dynamisme.

La véritable justification d'une bonne axiomatique, c'est son succès.

Observons BOURBAKI à l'œuvre dans le choix des définitions: L'Analyse classique partait de définitions « naturelles » dans un contexte historique, et en déduisait des théorèmes-clefs; puis poursuivait l'étude de la théorie, en gardant les définitions de départ.

BOURBAKI, dans la même situation, va modifier les définitions en fonction des théorèmes-clefs; il va, en termes incorrects mais expressifs, prendre les théorèmes-clefs pour définitions. C'est là un des aspects les plus importants de la *bourbakisation* des théories.

De façon plus précise, lorsqu'un théorème établit que des êtres E définis par une définition D ont une propriété P , qui se révèle par la suite plus maniable que D , ou qui garde un sens dans un champ plus vaste que D , ouvrant ainsi la voie à des généralisations, BOURBAKI fait jouer à P le rôle initial de D , obtenant ainsi, soit une définition de E équivalente mais plus commode, soit un élargissement de la classe des êtres E auxquels s'appliquera la théorie.

Voici quelques illustrations de ce processus fécond:

a) *Mesures de Radon.* — Un théorème de F. Riesz établit que, sur R , il y a identité entre les intégrales de Stieltjes (définies à

partir d'une fonction localement à variation bornée), et les formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{K}(R)$ des fonctions numériques continues nulles hors d'un compact.

Or cette seconde définition a de multiples avantages: Extension immédiate, non seulement à R^n , mais à tout espace localement compact; maniabilité beaucoup plus grande dans l'étude des opérations sur les mesures (produit de mesures, image de mesures, etc...), adaptation parfaite à la définition de la topologie vague sur l'espace des mesures, qui s'est révélée la plus commode des topologies.

D'où la définition bien connue des mesures de Radon. L'histoire devait montrer que le choix de cette nouvelle définition n'était pas heureux que pour l'intégration. En effet, on s'aperçut vite de la commodité du procédé: Une mesure de Radon n'était autre qu'une forme linéaire continue sur un certain espace vectoriel topologique. Il n'y avait qu'un pas à franchir pour disposer aussitôt d'un procédé fécond de définition d'êtres nouveaux: Soit V un espace vectoriel topologique; les formes linéaires continues sur V sont de nouveaux êtres qui constituent un espace vectoriel V' , dual de V ; la théorie de la dualité, maintenant bien constituée, permet de définir sur V' des topologies variées, qui en facilitent l'étude. A tout choix de V va correspondre un espace V' , d'où une grande richesse de possibilités. Signalons par exemple les distributions de L. Schwartz, les courants de de Rham, les surfaces généralisées de L. C. Young.

b) *Mesures invariantes sur un groupe.* — L'intégrale (de Lebesgue) sur R peut être définie à partir de celle des fonctions continues à support compact par un procédé de prolongement bien connu; sur $\mathcal{K}(R)$, c'est une forme linéaire I qui est positive en ce sens que $I(f) \geq 0$ pour toute $f \geq 0$; et elle est invariante par translation, en ce sens que $I(f) = I(g)$ lorsque g se déduit de f par translation.

Or on montre que toute fonction I sur $\mathcal{K}(R)$ qui possède ces propriétés ne diffère de l'intégrale de Lebesgue que par un facteur constant. D'où une définition axiomatique de l'intégrale de Lebesgue sur R (à un facteur près): C'est une forme linéaire sur $\mathcal{K}(R)$, positive et invariante par les translations de R . Non

seulement cette nouvelle définition est commode parce que, débarrassée de l'écran d'une construction effective, elle met en évidence les propriétés directement utiles de l'intégrale, mais elle s'adapte immédiatement au cas des groupes localement compacts quelconques.

c) *Fonctions mesurables.* — L'Analyse classique définit les applications mesurables de R^n dans R de la façon suivante :

f est mesurable si pour tout nombre λ , l'ensemble des x tels que $f(x) \leq \lambda$ est mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Le théorème de Lusin montre l'équivalence de cette définition et de la suivante :

f est mesurable si, pour tout compact K de R^n , et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un sous-compact K' de K tel que 1) la mesure de $(K \div K')$ soit inférieure à ε ; 2) la restriction de f à K' soit continue.

Or, la propriété évoquée dans cette seconde définition est à la fois suggestive et commode dans de nombreuses applications; d'autre part elle conserve un sens intéressant lorsqu'on remplace la mesure par une fonction d'ensemble plus générale, par exemple la capacité en théorie du potentiel; enfin elle s'adapte immédiatement à la définition des applications mesurables d'un espace localement compact (muni d'une mesure de Radon positive) dans un espace topologique quelconque.

On adoptera donc la seconde définition, plutôt que la définition classique.

5. *Choix des matières et des théorèmes.*

Dans l'élaboration de son traité, BOURBAKI doit à chaque instant choisir; nous l'avons vu à l'œuvre dans le choix des définitions; il choisit avec autant de soin la matière qu'il incorporera à l'œuvre.

Il s'intéresse surtout aux outils, et uniquement à ceux qui se sont révélés utiles; les résultats élégants et même profonds, mais qui apparaissent comme des fins de théorie ou des impasses, ne retiennent pas son attention. Il élimine, sans souci d'être complet, des notions voisines de celles qu'il a jugées les plus fondamentales; s'il estime qu'une théorie n'est pas assez mûre pour qu'un

choix s'impose entre ses diverses axiomatiques possibles, il préfère attendre que la théorie mûrisse. Il n'a pas le goût des hors-d'œuvre, des enjolivures, des développements gratuits sans connexion avec le reste des mathématiques.

Il construit solidement, à la romaine; si l'œuvre est parfois élégante, elle le doit à la beauté de sa structure interne; quant à lui, il recherche avant tout simplicité, solidité, utilité, rendement.

En topologie générale il a, après HAUSDORFF, fait un choix sobre dans une jungle de notions: Choix d'axiomes commodes des espaces topologiques généraux, choix de la bonne notion de compacité; l'introduction des filtres (H. CARTAN) est venue simplifier la notion de convergence; celle des espaces uniformes (A. WEIL) a unifié plusieurs notions jusque-là isolées, et les relations entre les espaces compacts et les espaces uniformes l'a entièrement justifiée.

En Analyse fonctionnelle, il a bien mis en valeur les notions et outils consacrés par l'usage, locale convexité des espaces vectoriels topologiques, dualité, théorème du graphe fermé, théorèmes de séparation d'ensembles convexes, théorèmes de Krein et Milman, de Stone-Weierstrass.

Dans la théorie de l'intégration, nous avons souligné déjà son option exclusive des mesures de Radon sur les espaces localement compacts, qui sont devenues entre ses mains un outil remarquable.

Dans les « livres élémentaires », les questions classiques sont traitées à la fois avec une économie de moyens et une généralité inusuelles. Le théorème des accroissements finis est énoncé pour des fonctions à valeurs dans un espace normé; les fonctions convexes sont traitées élémentairement mais de façon assez complète pour les besoins courants de l'analyse; les primitives sont définies dans le cadre des fonctions réglées; enfin nous avons déjà noté la généralité de son étude « élémentaire » des équations différentielles.

L'ANALYSE MODERNE DANS LE MONDE

J'ai affirmé au début de ce travail que l'étude de l'œuvre de BOURBAKI et de ses disciples donnait une idée assez fidèle des tendances modernes de l'Analyse.