MÉTHODES DE DÉCOUVERTES LIEES A L'AXIOMATIQUE

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

de catégories générales, d'où une notion de *catégorie avec produit*; dès lors, si l'on rencontre une nouvelle catégorie concrète non encore munie d'une notion de produit, le schéma général permet de s'assurer si l'on peut définir ce produit, et précise même sa définition.

Résumons: Nous venons d'étudier quelques outils de caractère très général; il en existe bien d'autres, comme par exemple les suites exactes et les diagrammes qui sont d'un usage constant en algèbre et en topologie algébrique. L'usage de ces outils est inséparable d'un symbolisme très précis dont le domaine d'application grandit constamment; c'est un nouveau langage, hermétique pour le profane, clair et suggestif pour l'initié.

Certes, ces outils ne constituent pas la « pierre philosophale »; ils ne tiennent pas lieu de génie créateur et ne valent que ce que vaut l'artisan.

MÉTHODES DE DÉCOUVERTES LIÉES A L'AXIOMATIQUE

Aucun outil et aucune méthode ne peuvent susciter les dons créateurs si ceux-ci n'existent déjà, mais ils peuvent considérablement en augmenter l'efficacité. Nous venons d'étudier quelques outils des théories axiomatiques; nous allons maintenant analyser quelques méthodes de découverte qui ne prennent tout leur sens que dans l'étude de structures multivalentes. Tout chercheur sérieux les redécouvre pour son compte, mais il n'est pas sans intérêt de les expliciter.

1. *Méthode de relâchement des axiomes.*

Voici un analyste qui croit exact un énoncé E concernant une structure-carrefour S définie par de nombreux axiomes. L' énoncé E est formulé en termes simples qui garderaient un sens pour un système axiomatique S' moins riche en axiomes (ce qui ne veut pas dire d'ailleurs que cet énoncé soit vrai dans S'). Il peut alors suivre la méthode suivante, qui revient à « relâcher » certains axiomes: Il va chercher à démontrer l'énoncé E dans S'; le moins grand nombre des combinaisons d'axiomes de S' peut faciliter alors la recherche de la démonstration; dans le cas favorable, ou bien il démontrera E dans S', donc aussi dans S, ou bien il mettra en évidence dans S' un « contre-exemple » C mettant l'énoncé E en défaut. Une étude approfondie de C peut alors l'amener à formuler une propriété supplémentaire P qui, ajoutée aux axiomes de S', permettrait de démontrer E. Il lui reste alors à revenir au système S pour examiner si on peut démontrer P; la démonstration de E en résultera.

2. *Méthode de renforcement des axiomes.*

La méthode précédente consistait à supprimer temporairement certains axiomes du système S; une autre méthode de recherche consiste à en ajouter de nouveaux, autrement dit à étudier des cas particuliers.

Les axiomes supplémentaires permettent d'utiliser des outils dont on ne disposait pas dans S; on obtient ainsi des énoncés et des démonstrations inattendus; on revient ensuite en arrière et on essaie d'adapter à S les résultats obtenus.

Un cas particulier bien connu de cette méthode consiste en l'utilisation de modèles discrets ou même finis: Par exemple, en calcul des probabilités, les processus de Markov doivent beaucoup à l'étude des processus sur les ensembles discrets ou finis; en théorie du potentiel, l'étude des noyaux sur un ensemble fini révèle des phénomènes insoupçonnés dans le cas général.

3. *Etude de structures voisines.*

Si l'on ne sait pas démontrer un énoncé E relatif à une structure-carrefour S, mais qu'on sait le démontrer pour une structure S' dont les axiomes diffèrent peu de ceux de S, une grande partie des lemmes en lesquels se décompose la démonstration de E dans S' est en général encore valable dans S; on examine les autres, on les formule au besoin d'une autre façon pour obtenir des énoncés valables dans S.

C'est ainsi que, dans l'impossibilité actuelle de démontrer l'hypothèse de Riemann, on étudie les problèmes voisins relatifs à des corps finis; on espère, soit pouvoir transposer une partie des résultats ainsi obtenus au cas classique, soit même faire apparaître ces divers cas comme des cas particuliers d'un même problème arithmético-algébrique. Un tel problème, plus général, peut être plus facilement résoluble; l'histoire des mathématiques montre en effet abondamment qu'un niveau convenable de généralité s'accompagne souvent d'une plus grande souplesse et dégage les ressorts secrets des démonstrations.

Il importe toutefois de ne pas tomber dans le travers consistant, lorsqu'on ne sait pas résoudre un problème, à résoudre des problèmes voisins plus faciles, et à croire qu'on a fait progresser la question initiale; de tels essais sont d'excellents travaux d'approche, mais il est souvent préférable de ne pas en imposer la lecture à autrui.

4. *Création de structures soumises à des exigences données.*

L'industrie construit maintenant, à la demande, des machines-outils capables de réaliser tel travail complexe; on est proche du jour où la chimie saura synthétiser les fibres-textiles satisfaisant à telle exigence du consommateur; en mathématiques, la théorie des catégories permet d'envisager maintenant la construction de structures possédant telles propriétés utiles dans telle question. L'état d'esprit du jeune mathématicien n'est plus en effet celui d'un constructeur en contact avec la matière. Il ne construit plus, de proche en proche, à partir de leurs éléments, les êtres complexes dont il a besoin; il impose seulement à ces êtres d'avoir des relations mutuelles données (et non contradictoires); ils constituent alors une catégorie qu'on étudie par une méthode régulière; la réalisation des éléments de la catégorie comme ensembles munis d'une certaine structure est l'un des derniers stades de la recherche.

Quelques caractères de l'œuvre de Bourbaki en Analyse

Nous avons examiné les outils et les principes; voyons maintenant la réalisation, dans l'œuvre collective ou personnelle des Bourbakistes.

1. *Axiomatique et multivalence.*

Conformément à ses principes, Bourbaki manifeste une prédilection pour les structures multivalentes. Il aime les énoncés