Quelques-uns des outils de l'axiomatique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QUELQUES-UNS DES OUTILS DE L'AXIOMATIQUE

Lors de l'étude d'une structure, le mathématicien moderne est amené à utiliser des structures auxiliaires; pour les construire, il a besoin d'un guide qui l'oriente vers les bonnes définitions. Nous examinerons ici quelques procédés qui ont fait leurs preuves et se sont révélés de bons guides.

Morphismes; structures initiales et finales. — Une structure sur un ensemble E est définie par plusieurs axiomes qui s'expriment en termes d'éléments de E et d'ensembles auxiliaires éventuels; la forme de ces axiomes définit ce qu'on appelle une *espèce de structure*. Nous nous contenterons ici de donner des exemples:

Les axiomes de groupe définissent une espèce de structure; les groupes commutatifs en constituent une sous-espèce. Autres exemples: l'espèce des espaces vectoriels sur R , des espaces topologiques compacts, des variétés différentiables.

Si deux ensembles A et B sont munis de structures de la même espèce, une bijection (c'est-à-dire une correspondance biunivoque) f de A sur B s'appelle un *isomorphisme* si, en un sens facile à préciser dans chaque cas, elle échange les structures de A et B .

Plus généralement un *morphisme* de A dans B est une application de A dans B possédant certaines propriétés liées à la structure; on choisit la définition des morphismes de telle sorte que le produit de deux morphismes en soit un autre, et que si une bijection f de A sur B est un morphisme, ainsi que f^{-1} , alors f est un isomorphisme. Par exemple, pour l'espèce de structure constituée par les espaces topologiques, les applications continues constituent une classe de morphismes; les applications ouvertes (qui transforment tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert) constituent une autre classe, moins utile d'ailleurs que la première.

Soient alors A un ensemble donné, (B_i) une famille d'ensembles munis d'une structure d'espèce donnée et, pour tout i , soit f_i une application de A dans B_i . La question se pose de savoir si l'on peut munir A d'une structure de la même espèce de telle

sorte que chaque f_i devienne un morphisme. Sous certaines conditions qu'on peut préciser, ceci est possible, et parmi toutes les solutions, il en existe même une privilégiée, qu'on appelle *structure initiale* associée aux (B_i, f_i) . C'est de cette façon que, pour l'espèce des espaces topologiques, on définit l'image réciproque d'une topologie, la topologie induite sur un sous-ensemble d'un espace donné, le produit d'une famille d'espaces topologiques.

Lorsque, par contre, f_i est une application de B_i dans A , la solution éventuelle du problème s'appelle la *structure finale* associée aux (B_i, f_i) ; c'est ainsi qu'on définit une topologie sur l'ensemble quotient A d'un espace topologique B par une relation d'équivalence R .

Ensembles et applications universelles. — Voici de quoi il s'agit : Soient S, T deux espèces de structures; soit A un ensemble d'espèce S ; on se donne une famille d'applications, dites $(S - T)$ applications de A dans les ensembles d'espèce T , et une famille d'applications, dites T -applications, des ensembles d'espèce T dans les ensembles de même espèce; on suppose ces familles transitives en ce sens que le produit d'une $(S - T)$ application par une T -application est encore une $(S - T)$ application, et que le produit de deux T -applications est encore une T -application.

On cherche alors s'il existe un ensemble $\mathcal{B}$ d'espèce T et une $(S - T)$ application Φ de A dans $\mathcal{B}$, tels que toute $(S - T)$ application φ (de A dans un B) s'écrive $\varphi = f \circ \Phi$, où f est une T -application de $\mathcal{B}$ dans B .

Sous des conditions suffisantes très générales, le problème a une solution, et même une infinité de solutions non isomorphes. Pour lever l'indétermination, on ajoute alors la condition suivante: L'image $\Phi(A)$ de A dans $\mathcal{B}$ est telle que deux T -applications de $\mathcal{B}$ dans un B , qui coïncident dans $\Phi(A)$, coïncident dans $\mathcal{B}$. L'espace $\mathcal{B}$ ainsi obtenu est l'*espace universel* associé à A , et Φ est l'*application universelle* associée à A .

Exemples.

a) *Groupe compact associé à un groupe topologique.* — A est un groupe topologique, T est l'espèce des groupes topologiques compacts, les $(S - T)$ applications et les T -applications sont des

homomorphismes continus quelconques. L'espace $\mathcal{B}$ s'appelle le groupe compact associé à A .

On montre qu'il y a identité entre les fonctions presque-périodiques sur A et les fonctions $g \circ \Phi$, où g est une fonction continue quelconque sur $\mathcal{B}$.

Cet exemple montre l'intérêt que peuvent avoir les ensembles universels pour l'Analyse.

b) *Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.* — A est le produit (cartésien) de deux espaces vectoriels E_1, E_2 (sur le corps R); T est l'espèce des espaces vectoriels sur R ; les $(S-T)$ applications sont les applications bilinéaires définies dans $E_1 \times E_2$; les T -applications sont les applications linéaires. L'espace vectoriel universel $\mathcal{B}$ s'appelle le produit tensoriel des espaces E_1, E_2 ; il ramène l'étude des applications bilinéaires définies dans $E_1 \times E_2$ à celle des applications linéaires définies dans $\mathcal{B}$.

Citons quelques autres ensembles universels:

Structures algébriques libres, anneaux et corps de fractions; complétion d'un espace uniforme, compactification de Stone-Cech, groupes topologiques libres, variété d'Albanèse (en géométrie algébrique).

Catégories et foncteurs. — La théorie des « catégories » est le dernier-né des grands outils mathématiques. A elle seule, elle suffirait à prouver l'unité des mathématiques. Elle constitue un nouveau pas dans l'abstraction; en effet, les relations qu'elle étudie ne sont même plus des relations entre éléments d'un même ensemble, mais entre des êtres d'une même « catégorie », voire même entre différentes catégories. Il est assez miraculeux qu'une telle généralité ne soit pas synonyme de vacuité et de facilité; en fait, cette théorie est devenue, dans de nombreux domaines, un guide indispensable de la jeune génération.

Nous nous contenterons de donner ici quelques définitions. Voici d'abord quelques exemples de catégories: La catégorie des groupes, des espaces vectoriels, des espaces topologiques, des ensembles ordonnés; et, plus généralement, la catégorie des ensembles munis d'une espèce de structure dans laquelle existent des morphismes.

Une catégorie n'est donc pas un ensemble; il est commode de l'imaginer comme une classe d'objets plus vaste qu'un ensemble.

Soit donc $\mathcal{C}$ une classe d'objets; à tous $x, y \in \mathcal{C}$, on suppose associé un ensemble désigné par $Hom(x, y)$, dont les éléments s'appellent *homomorphismes* ou *morphismes* de x dans y ; et pour tous $x, y, z \in \mathcal{C}$, on suppose donnée une application $(f, g) \rightarrow g \circ f$, nommée *composition*, de $Hom(x, y) \times Hom(y, z)$ dans $Hom(x, z)$.

On dira que $\mathcal{C}$, muni de ses homomorphismes et de leur loi de composition, est une catégorie si les axiomes suivants sont satisfaits:

K_1 . — Associativité de la composition: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

K_2 . — Pour tout $x \in \mathcal{C}$, il existe un élément e_x de $Hom(x, x)$ appelé *unité* de x , tel que pour tout homomorphisme f on ait $e_x \circ f = f$ et $f \circ e_x = f$ (lorsque ces expressions ont un sens).

On appellera alors *isomorphisme* de x dans y ($x, y \in \mathcal{C}$) tout $u \in Hom(x, y)$ tel qu'il existe $v \in Hom(y, x)$ pour lequel $u \circ v = e_y$ et $v \circ u = e_x$.

Les *foncteurs* vont établir des relations entre catégories différentes: Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories; on se donne une loi F qui, à tout $x \in \mathcal{C}$ associe un $x' \in \mathcal{C}'$; on note cet x' par $F(x)$; on suppose aussi que, à tous $x, y \in \mathcal{C}$, et à tout $u \in Hom(x, y)$, F associe $u' \in Hom(x', y')$ et on note cet u' par $F(u)$.

On dira que F est un foncteur lorsque

- 1) Si u est une unité; il en est de même de $F(u)$;
- 2) Pour tous u, v tels que $u \circ v$ ait un sens, on a:

$$F(u \circ v) = F(u) \circ F(v).$$

A partir de ces deux notions de base, catégories et foncteurs, on peut alors construire toute une algèbre qui s'enrichit lorsqu'on spécialise les catégories. Indiquons sur un exemple simple de quelle façon la théorie des catégories peut servir de guide: De l'étude de diverses catégories « concrètes » classiques dans lesquelles existe une notion de produit (ensembles ordonnés, groupes, espaces topologiques), on dégage un schéma exprimable en termes

de catégories générales, d'où une notion de *catégorie avec produit*; dès lors, si l'on rencontre une nouvelle catégorie concrète non encore munie d'une notion de produit, le schéma général permet de s'assurer si l'on peut définir ce produit, et précise même sa définition.

Résumons: Nous venons d'étudier quelques outils de caractère très général; il en existe bien d'autres, comme par exemple les suites exactes et les diagrammes qui sont d'un usage constant en algèbre et en topologie algébrique. L'usage de ces outils est inséparable d'un symbolisme très précis dont le domaine d'application grandit constamment; c'est un nouveau langage, hermétique pour le profane, clair et suggestif pour l'initié.

Certes, ces outils ne constituent pas la « pierre philosophale »; ils ne tiennent pas lieu de génie créateur et ne valent que ce que vaut l'artisan.

MÉTHODES DE DÉCOUVERTES LIÉES A L'AXIOMATIQUE

Aucun outil et aucune méthode ne peuvent susciter les dons créateurs si ceux-ci n'existent déjà, mais ils peuvent considérablement en augmenter l'efficacité. Nous venons d'étudier quelques outils des théories axiomatiques; nous allons maintenant analyser quelques méthodes de découverte qui ne prennent tout leur sens que dans l'étude de structures multivalentes. Tout chercheur sérieux les redécouvre pour son compte, mais il n'est pas sans intérêt de les expliciter.

1. *Méthode de relâchement des axiomes.*

Voici un analyste qui croit exact un énoncé E concernant une structure-carrefour S définie par de nombreux axiomes. L'énoncé E est formulé en termes simples qui garderaient un sens pour un système axiomatique S' moins riche en axiomes (ce qui ne veut pas dire d'ailleurs que cet énoncé soit vrai dans S'). Il peut alors suivre la méthode suivante, qui revient à « relâcher » certains axiomes: Il va chercher à démontrer l'énoncé E dans S' ; le moins grand nombre des combinaisons d'axiomes de S' peut faciliter alors la recherche de la démonstration; dans le cas favorable, ou