

I. Ensembles stratifiés.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La démonstration exige une description de la structure des applications polynomiales; il n'est pas question de donner ici une justification complète des propriétés énoncées, qui entraînerait à des développements techniques très étendus; je me bornerai à donner les définitions nécessaires ainsi que l'énoncé des théorèmes principaux sans démonstration; les théorèmes 1 à 3 cités ici ne jouent d'ailleurs pas de rôle dans la discussion de notre exemple.

Les notions fondamentales sont celles d'*ensembles stratifiés*, et d'*applications stratifiées*. Nous allons les définir:

I. ENSEMBLES STRATIFIÉS.

Un *ensemble stratifié* (Manifold Collection) est un fermé de l'espace \mathbb{R}^n ; si k est la dimension de l'ensemble stratifié E , il existe dans E des sous-ensembles fermés $E^{k-1} \supset, E^{k-i} \supset \dots \supset E^0$, également stratifiés, tels que la différence $E^j - E^{j-1}$, soit une *variété différentiablement plongée* de dimension j ; en particulier E^0 est constitué d'un ensemble de points isolés.

On appellera *strate* de dimension j de l'ensemble E toute composante connexe de la variété $E^j - E^{j-1}$. Les sous-ensembles stratifiés de E doivent satisfaire aux propriétés suivantes:

- i) L'adhérence de toute strate est un sous-ensemble stratifié;
- ii) La frontière de l'adhérence d'une strate X constitue un ensemble stratifié de dimension strictement inférieure à $\dim X$, le bord de X (noté ∂X);
- iii) Toute réunion et toute intersection finies de sous-ensembles stratifiés sont des sous-ensembles stratifiés;
- iv) Le nombre des strates de E est fini.

Il importe ensuite de préciser comment les strates se raccordent entre elles; on va donner dans ce but un certain nombre d'axiomes auxquels doit satisfaire tout ensemble stratifié.

Si Y est une strate de E , on appellera *étoile* de Y (notée $Et(Y)$) l'ensemble des strates X telles que $Y \subset \bar{X}$; l'adhérence de $Et(Y)$ est un ensemble stratifié.

A toute strate Y de E on associe un voisinage tubulaire $T(Y)$ assez petit au voisinage de ∂Y pour que la condition suivante soit

satisfaite. Si Y et Z sont deux strates, et si $T(Y) \cap T(Z)$ n'est pas vide, alors l'une des strates Y (ou Z) est adhérente à l'autre.

Chaque tube $T(Y)$ est muni d'une rétraction $k_Y: T(Y) \rightarrow Y$, de rang maximum sur $T(Y)$; si Z est une strate de l'étoile de Y , alors $T(Y) \cap Z$ n'est pas vide, on désignera par k_{YZ} la restriction de k_Y à $T(Y) \cap Z$. Le système des tubes $T(Y)$ et de leurs retractions k_Y sera supposé satisfaire aux axiomes:

IR) (*Incidence régulière*): La restriction $k_{YZ}: T(Y) \cap Z \rightarrow Y$ est de rang maximum ($= \dim Y$).

RT) (*Raccordement des tubes*): Si on a trois strates X, Y, Z telles que $X \subset \partial Y$, $Y \subset \partial Z$, alors dans $T(X) \cap T(Y) \cap Z$, on a:

$$k_{XZ} = k_{XY} \circ k_{YZ}.$$

Enfin on suppose définie sur toute strate X une fonction réelle G_X nulle sur ∂X , strictement positive sur X et de classe C^1 , telle que la différentielle dG_X ne s'annule pas dans un voisinage $G_X \leq a$ de ∂X dans \bar{X} . Une telle fonction (dite « fonction tapisante » pour la strate X) devra satisfaire à l'axiome:

FT) (*Fonction tapisante*): Si $X \subset \partial Y$, la restriction de k_{XY} à une hypersurface de niveau de la fonction $G_Y = b$ est de rang maximum dans $T(X) \cap Y$, pour toute valeur b assez petite.

On peut observer que l'axiome FT) implique l'axiome IR), tout au moins pour un tube T' contenu dans T .

DÉFINITION. — Une application différentiable $F: R^n \rightarrow R^p$ est dite *transversale* (*t-régulière* au sens de [1]) sur un sous-ensemble stratifié E de R^p , si F est *transversale* sur toutes les strates de E .

En vertu des théorèmes connus de transversalité [1], « presque-toute » application (au sens de la C^r -topologie) est transversale sur E . On a alors:

THÉORÈME 1. — Si $F: R^n \rightarrow R^p$ est une immersion transversale sur E , l'image réciproque $E' = F^{-1}(E)$ est un ensemble stratifié de E' .

Les strates de E' constituent évidemment les variétés $F^{-1}(Y)$, où Y est une strate de E ; il reste à s'assurer que ces strates

vérifient les axiomes de raccordement; cela implique la construction, pour les strates de E' , de tubes et de rétractions satisfaisant à IR) et RT); de même on construira des fonctions tapissantes comme images réciproques de celles données sur E qui satisfont à FT).

II. APPLICATIONS STRATIFIÉES.

Une application F d'un ensemble stratifié E dans un ensemble stratifié E' sera dite *stratifiée*, si:

- 1° F est continue;
- 2° L'image par F de toute strate de E est une strate de E' ;
- 3° La restriction de F à toute strate X de E est une application différentiable de rang maximum de la strate X sur la strate image $X' = F(X)$.

Par exemple, si E est l'image réciproque d'un ensemble E' par une application transversale $F: R^n \rightarrow R^p \supset E'$, alors l'application F restreinte à E est stratifiée.

THÉORÈME 2 DE TRIVIALITÉ. — Si F est une application stratifiée de l'ensemble E dans le segment I (muni de sa stratification banale), et si F est *propre*, alors F est localement triviale sur tout segment intérieur à I.

Esquisse de la démonstration. — On construit dans E un champ de vecteurs (H) tel que: 1° En tout point x de E , $H(x)$ est un vecteur de la strate contenant x ; 2° Dans chaque strate Y de E , H est différentiable; 3° L'image par l'application F de $H(x)$ est le vecteur unitaire de I; 4° Bien que non nécessairement continu dans l'espace ambiant contenant E , le champ (H) donne par intégration des homéomorphismes de toute image réciproque $F^{-1}(a)$ sur $F^{-1}(b)$, $a, b \in I$.

La construction se fait par induction sur la dimension des strates. On obtient la continuité requise pour l'intégration de H en imposant au champ (H) d'admettre des intégrales premières locales (notamment les fonctions tapissantes, dont c'est là la fonction).