§ 5. EINBETTUNGSFRAGEN.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

topiegruppe $\pi_{n+4k-1}(\mathbf{S}^n)$ (*Proc. Intern. Congress of Math.*, Edinburgh, 1958, pp. 454-458).

§ 5. Einbettungsfragen.

5.1. Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Das A-Geschlecht $A(M^{4k})$ ist definiert als der Wert von $2^{4k}\hat{A}_k(p_1, \ldots, p_k) = A_k(p_1, \ldots, p_k)$ auf dem orientierten Grundzyklus von M^{4k}. Dabei sind $p_1, p_2, \ldots$ die Pontrjaginschen Klassen von M^{4k}, $(p_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z}))$. In [6, Part II] wurde gezeigt, dass $A(M^{4k})$ eine ganze Zahl ist. In [5] wurde folgender Satz bewiesen.

Satz. — *Es sei M^{4k} eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $8k-2q$ differenzierbar einbettbar ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+1} teilbar. Wenn ausserdem noch $q \equiv 2 \bmod 4$ ist, dann ist $A(M^{4k})$ durch 2^{q+2} teilbar.*

Der Beweis verläuft, indem man annimmt, dass X in der Sphäre der Dimension $8k-2q$ eingebettet ist. Mit Hilfe geeigneter Darstellungen der orthogonalen Gruppe konstruiert man aus dem Normalbündel von X ein Element von $K^0(\mathbf{S}^{8k-2q})$, auf das man den Bottschen Satz anwendet (3.5).

5.2. Wie in 5.1 sei M^{4k} kompakt orientiert differenzierbar. Wir nehmen einmal an, dass M^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ differenzierbar eingebettet werden kann. Dann können wir Satz 5.1 mit $q = 2k-2$ anwenden und erhalten, dass $A(M^{4k})$ durch 2^{2k-1} und für gerades k sogar durch 2^{2k} teilbar ist.

5.3. Die Mannigfaltigkeit M^{4k} (siehe 5.2) sei in der Sphäre $\mathbf{S}^{4k+4}$ eingebettet. Die Pontrjaginschen Klassen des Normalbündels sollen mit $\overline{p}_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z})$ bezeichnet werden. Da das Normalbündel die Faser $\mathbf{R}^4$ hat, verschwindet $\overline{p}_i$ für $i > 2$. Ferner ist $\overline{p}_2$ das Quadrat der *Eulerschen Klasse des Normalbündels*, welche bei jeder Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine Sphäre verschwindet. Also ist $\overline{p}_i = 0$ für $i \geqq 2$. Nun ist

$\{A_k\}$ die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$(2\sqrt{z})/\sinh(2\sqrt{z})\ .$$

Es sei $\{B_k\}$ die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$\sinh(2\sqrt{z})/(2\sqrt{z})\ .$$

Dann ist

$$A_k(p_1,\ldots,p_k) = B_k(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_k})\ ,$$

falls $p\cdot\bar{p} = 1$, $\quad (p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\ , \quad \bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty}\overline{p_i})$.

In unserer besonderen Situation ist $\overline{p_i} = 0$ für $i \geqq 2$. Deshalb ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j(p_1,\ldots,p_j) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\overline{p_1},0,\ldots,0) = \frac{\sinh 2\sqrt{\overline{p_1}}}{2\sqrt{\overline{p_1}}}$$

und damit

$$A_k(p_1,\ldots,p_k) = \frac{2^{2k}(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!}\ .$$

Also ist nach 5.2 die Klasse

$$(1)\qquad \frac{2\cdot(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k};\mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig}\ .$$

Für gerades k ist sogar

$$(2)\qquad \frac{(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k};\mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig}\ .$$

5.4. Der Index $\tau(M^{4k})$ einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist die Anzahl der positiven minus die Anzahl der negativen Eigenwerte der quadratischen Form $B(x,x)$ (für $x \in H^{2k}(M^{4k};\mathbf{R})$), wo $B(x,x)$ der Wert von $x\cdot x$ auf dem orientierten Grundzyklus von M^{4k} ist. Es gilt [12]

$$(3)\qquad \tau(M^{4k}) = L_k(p_1,\ldots,p_k)[M^{4k}]\ ,$$

wo $\{L_k(p_1, \ldots, p_k)\}$ die zur charakteristischen Potenzreihe $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{z}}$ gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist. Macht man wieder die Annahme, dass M^{4k} in der Sphäre der Dimension $4k+4$ eingebettet ist, dann folgt ähnlich wie in 5.3, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_j(p_1, \ldots, p_j) = \frac{\operatorname{tgh}\sqrt{\overline{p}_1}}{\sqrt{\overline{p}_1}}$$

und damit

$$L_k(p_1, \ldots, p_k) = \pm t_k \cdot \frac{\overline{p}_1^{\,k}}{(2k+1)!}, \tag{4}$$

wo t_k die $(2k+1)$-te Ableitung von $\operatorname{tg}(x)$ für $x = 0$ ist. Bekanntlich ist t_k eine gerade ganze Zahl ($k \geqq 1$). Aus (1)-(4) folgt

5.5. Satz. — *Die kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^{4k} möge sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+4$ einbetten lassen ($k \geqq 1$). Dann ist der Index $\tau(M^{4k})$ durch $\frac{t_k}{2}$ teilbar, wo t_k die $(2k+1)$-Ableitung von $\operatorname{tg}(x)$ für $x = 0$ ist. Ist ausserdem k gerade, dann ist $\tau(M^{4k})$ sogar durch t_k teilbar.*

Für die ganzen Zahlen t_k hat man folgende Formel

$$t_{k-1} = \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{2k},$$

wo B_k die k-te Bernoullische Zahl ist. Es gilt

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 16, \quad t_3 = 2^4 \cdot 17, \quad t_4 = 2^8 \cdot 31.$$

Für $k = 1$ ist der vorstehende Satz trivial (Jede M^4 kann in den $\mathbf{R}^8$ eingebettet werden.) Für $k = 2$ besagt er, dass eine M^8, die in den Euklidischen Raum der Dimension 12 einbettbar ist, einen durch 16 teilbaren Index hat.

5.6. Satz. — *Es gibt eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit V^{4k}, die sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+3$ einbetten lässt, und deren*

Index gleich $\pm t_k$ *ist* ($t_k = (2k+1)$-*Ableitung von* $\operatorname{tg}(x)$ *für* $x = 0$).

Zum Beweis benötigen wir zunächst ein Lemma, das bereits bei Kervaire (Courbure intégrale généralisée et homotopie, *Math. Ann.*, *131*, 219-252 (1956), siehe S. 247) vorkommt.

LEMMA. — *Das cartesische Produkt* $\mathbf{S}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{S}^{n_r}$ *von Sphären kann in den Euklidischen Raum der Dimension* $n_1+\ldots+n_r+1$ *differenzierbar eingebettet werden.*

Das Lemma ist richtig für $r = 1$. Wir beweisen es durch Induktion über r. Offensichtlich kann $\mathbf{S}^{n_r}$ mit trivialem Normalbündel in den euklidischen Raum der Dimension $n_1+\ldots+n_r+1$ eingebettet werden. Die Faser des Normalbündels ist ein $\mathbf{R}^d$ mit $d = n_1+\ldots+n_{r-1}+1$. Nach Induktionsannahme ist $\mathbf{S}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{S}^{n_{r-1}}$ differenzierbar in $\mathbf{R}^d$ einbettbar. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

In [12, § 9.4] wird erwähnt, dass es in $\mathbf{S}^2\times\ldots\times\mathbf{S}^2$ ($2k+1$ Faktoren) eine Untermannigfaltigkeit V^{4k} der Codimension 2 gibt, die mit jedem Faktor $\mathbf{S}^2$ die Schnittzahl 1 hat.

Nach dem Lemma ist V^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+3$ differenzierbar einbettbar. Nach [12, § 9.4] ist der Index von V^{4k} in der Tat gleich der $(2k+1)$-ten Ableitung von $\operatorname{tgh} x$ für $x = 0$, q.e.d.

Der vorstehende Satz zeigt, dass Satz 5.5 für gerades k scharf ist. Für $k = 3, 5, \ldots$ ist uns keine M^{4k} bekannt, die in $\mathbf{R}^{4k+4}$ einbettbar ist und deren Index gleich $t_k/2$ ist.

LITERATUR

[1] ADAMS, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, *72* (1960), 20-104.

[2] ALEXANDROFF, P. und H. HOPF, *Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[3] ATIYAH, M. F. und F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *65* (1959), 276-281.

[4] ——und F. HIRZEBRUCH, Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 3; *Amer. Math. Soc.*, 1961.

[5] —— und F. HIRZEBRUCH, Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables. *Bull. Soc. Math. France*, *87* (1959), 383-396.