§ 1. Einführung.

Die vorliegende Arbeit ist direkt aus dem Vortrag hervorgegangen. Das erklärt, warum häufig unnötig starke Voraussetzungen gemacht werden. Sie sollten Redner und Zuhörern das Leben erleichtern.

Besonders schöne Anwendungen der Theorie der charakteristischen Klassen hat Milnor in seinen Untersuchungen über die differenzierbaren Strukturen der Sphären gegeben. Darauf und auf viele andere Anwendungen konnte hier nicht eingegangen werden.

§ 1. Einführung.

1.1. Gegeben sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X. Eine klassische Frage ist: Besitzt X ein stetiges Feld von Tangentialvektoren, das in keinem Punkte von X verschwindet ? Die Antwort lautet: X besitzt genau dann ein solches Feld, wenn die Euler-Poincarésche Charakteristik von X gleich Null ist. (Satz von Hopf [2].)

1.2. Die Menge aller Tangentialvektoren von X bildet einen Raum E mit einer Projektion $\pi\colon E \to X$, die jedem Vektor seinen Fusspunkt zuordnet. Die obige Frage (1.1) kann auch so formuliert werden: Gibt es einen „Schnitt“ $s\colon X \to E$ mit $s(x) \neq 0$ für alle $x \in X$? Ein Schnitt s in dem Vektorraum-Bündel (E, X, π) ist dabei eine stetige Abbildung $s\colon X \to E$, für die $\pi \circ s$ gleich der identischen Abbildung von X auf X ist.

1.3. Eine der ersten Arbeiten zur Theorie der charakteristischen Klassen ist die Dissertation von Stiefel [16]. Stiefel verwendet die Homologietheorie. Die cohomologische Darstellung geht unmittelbar aus der Stiefelschen Arbeit hervor. Wir wollen hier die Cohomologie verwenden; das ist ohnehin unerlässlich, wenn man nicht nur das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit sondern beliebige reelle Vektorraum-Bündel betrachten will.

Stiefel hat einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X Cohomologie-Klassen $w_i \in H^i(X; \mathbf{Z}_2)$ zugeordnet ($w_0 = 1$), welche folgende Eigenschaft haben:

Wenn es ein r-tupel von Schnitten $s_i\colon X \to E$ $(i=1, \dots, r)$ gibt, so dass $s_1(x), \dots, s_r(x)$ für alle $x \in X$ als Vektoren des reellen Vektorraumes $\pi^{-1}(x)$ linear-unabhängig sind, dann verschwindet w_i

für $i > n - r$. (Ist $r = n$, dann heisst X parallelisierbar. In diesem Falle ist $w_i = 0$ für $i > 0$.)

Es sei $n = \dim X$. Der Wert von w_n auf dem Grundzyklus $[X] \in H_n(X; \mathbf{Z}_2)$ ist gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik von X (reduziert modulo 2), was die gerade erwähnte Eigenschaft der Stiefelschen Klassen mit dem Satz von Hopf (1.1) in Verbindung setzt.

1.4. Wir definieren die totale Stiefel-Whitneysche Klasse

$$w \in H^*(X; \mathbf{Z}_2) = \sum_{i=0}^{n} H^i(X; \mathbf{Z}_2)\,, \qquad n = \dim X\,,$$

durch die Gleichung

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i = 1 + w_1 + \ldots + w_n\,. \tag{1}$$

Für den reellen projektiven Raum $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ hat Stiefel [17] die Klasse w bestimmt. Es gilt

$$w(\mathbf{P}_n(\mathbf{R})) = (1+g)^{n+1}\,, \tag{2}$$

wo g das von 0 verschiedene Element von $H^1(\mathbf{P}_n(\mathbf{R}); \mathbf{Z}_2)$ ist.

Wenn $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ parallelisierbar ist, dann müssen die positiv-dimensionalen Stiefelschen Klassen von $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ verschwinden, oder (gleichbedeutend) es muss $w(\mathbf{P}_n(\mathbf{R})) = 1$ sein. (2) und bekannte Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ergeben, dass $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ nur dann parallelisierbar sein kann, wenn $n+1$ eine Potenz von 2 ist [17]. Also kann die Sphäre $\mathbf{S}^n$ nur dann „antipodentreu" parallelisierbar sein, wenn $n+1$ eine Potenz von 2 ist.

Über die Parallelisierbarkeit von $\mathbf{S}^n$ lässt sich mit der hier geschilderten Methode keine Aussage erhalten, da die Klasse $w(\mathbf{S}^n)$ gleich 1 ist. Dennoch ist heute bekannt, dass $\mathbf{S}^n$ nur für $n = 1, 3, 7$ parallelisierbar ist. Der Beweis erfolgt entweder mit Hilfe der Resultate von Adams [1] über die Hopfsche Invariante oder mit Hilfe der Bottschen Theorie und der charakteristischen Klassen [13]. Es werde auf den Vortrag von Bott auf diesem Symposium verwiesen.

1.5. Unabhängig von Stiefel hat Whitney [18] die Klassen $w_i \in \mathrm{H}^i(X; \mathbf{Z}_2)$ für ein *reelles* Vektorraum-Bündel (E, X, π) mit

X als Basis definiert. Die in 1.3 erwähnte Eigenschaft der w_i, die man heute Stiefel-Whitneysche Klassen nennt, gilt unverändert.

Später hat dann Chern [10] die Chernschen Klassen $c_i \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *komplexes* Vektorraum-Bündel über dem Raum X und Pontrjagin (siehe z.B. [14]) die Pontrjaginschen Klassen $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$ für ein *reelles* Vektorraum-Bündel über X eingeführt. Heute definiert man die Pontrjaginsche Klasse p_i eines reellen Vektorraum-Bündels ξ als das $(-1)^i$-fache der Chernschen Klasse c_{2i} der komplexen Erweiterung von ξ (siehe z.B. [12]). Man beachte, dass die c_i und p_i ganzzahlige Cohomologieklassen sind, während die w_i Klassen mit Koeffizienten in der Gruppe der Ordnung 2 sind.

1.6. In dem Vortrag von Steenrod auf diesem Symposium ist von Cohomologie-Operationen die Rede. Die Cohomologie-Operation Sq^i zum Beispiel ordnet jedem Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. Die charakteristische Klasse w_i ordnet jedem reellen Vektorraum-Bündel über X ein Element von $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ zu. So wie eine Cohomologie-Operation eine natürliche Abbildung von der Cohomologietheorie in die Cohomologietheorie ist, so ist eine charakteristische Klasse eine natürliche Abbildung von der Theorie der Vektorraum-Bündel in die Cohomologietheorie. Diese Analogie hat eine tiefere Bedeutung. Wir wollen versuchen, das in diesem Vortrag für den Fall der *komplexen* Vektorraum-Bündel näher auseinanderzusetzen: Mit Hilfe aller komplexen Vektorraum-Bündel, die den gegebenen Raum X als Basis haben, können „Cohomologie-Gruppen" $K^n(X)$ definiert werden [4] (n beliebige ganze Zahl), die den Axiomen von Eilenberg-Steenrod [11] genügen bis auf das „Dimensionsaxiom", welches besagt, dass die Cohomologiegruppen des einpunktigen Raumes in den von 0 verschiedenen Dimensionen verschwinden. Die charakteristischen Klassen liefern natürliche Abbildungen von dieser neuen Cohomologietheorie in die übliche Cohomologietheorie.

§ 2. Eine neue Cohomologietheorie [4].

2.1. Es sei X ein endlicher Zellenkomplex (endlicher CW-Komplex). (Diese Annahme ist viel zu speziell; sie dient der