

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 45. Multiplicateurs d'un cycle d'idéaux semi réduits.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37125>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

racine finale. Les côtés orientés de la ligne indiquent les passages d'un idéal à son suivant. (Pour la clarté des figures, on a consacré deux graphiques, chacun à deux cycles.)

Un *idéal double*, qui est le suivant d'un idéal, de même racine finale, est représenté par l'extrémité d'un côté, parallèle à l'axe des normes. Un *idéal réfléchi*, qui a la même norme que son suivant, est représenté par l'origine d'un côté, parallèle à l'axe des racines. On peut encore remarquer que les idéaux suivant et précédent d'un idéal double ont des normes égales; les sommets voisins (précédent et suivant) du sommet représentatif sont sur une même parallèle à l'axe des racines.

45. Multiplicateurs d'un cycle d'idéaux semi réduits.

On peut exprimer les relations de congruence entre les idéaux d'un cycle, en utilisant une suite d'éléments du corps, dont les termes se reproduisent en progressions géométriques.

DÉFINITION. — Relativement à un cycle d'idéaux semi réduits:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i); \quad i, \text{ mod. } h;$$

on appelle **multiplicateurs** une suite, doublement illimitée, d'éléments ρ_i du corps, vérifiant la relation de récurrence:

$$(\theta - c_i) \times \rho_i = m_{i+1} \times \rho_{i+1}; \quad i \text{ entier quelconque};$$

dont les coefficients sont, avec une transposition, ceux de la relation de récurrence entre les idéaux du cycle.

On convient, en outre, de prendre $\rho_0 = 1$, ce qui revient à distinguer, plus spécialement l'idéal $\mathbf{M}_0$, affecté de l'indice nul, dans le cycle.

De cette construction, on déduit l'expression des multiplicateurs au moyen de l'un d'entre eux (notamment de ρ_0):

$$\begin{aligned} \rho_{r+\lambda} &= \rho_r \times [\Pi(\theta - c_{i-1})] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } r+1 \text{ à } r+\lambda; \\ \rho_{r-\lambda} &= \rho_r \times [\Pi m_{i+1}] : [\Pi(\theta - c_i)]; \quad i \text{ de } r-\lambda \text{ à } r-1; \end{aligned} \quad \lambda \text{ entier positif.}$$

En particulier, on obtient ρ_λ et $\rho_{-\lambda}$, en prenant r nul et $\rho_0 = 1$. On aurait pu, plus généralement, choisir arbitrairement la valeur d'un des multiplicateurs ρ_r , toutefois égale à un élément du corps.

La périodicité des coefficients $\theta - c_i$ et m_i (i défini mod. h) entraîne une répartition en h progressions géométriques des multiplicateurs ρ_i ; (ou une périodicité de multiplication):

THÉORÈME de la périodicité de multiplication. — *Pour des indices en progression arithmétique, de raison h (nombre d'éléments du cycle), les multiplicateurs forment une progression géométrique, dont la raison est un élément ω , du corps:*

$$\rho_{r+\mu h} = \rho_r \times \omega^\mu; \quad \omega = [\Pi(\theta - c_j)] : [\Pi m_j]; \quad j \text{ de } 0 \text{ à } h-1;$$

μ entier quelconque.

En remplaçant λ par h , dans l'expression des multiplicateurs, au moyen de ρ_r , on obtient:

$$\rho_{r+h} = \rho_r \times \omega; \quad \omega = [\Pi(\theta - c_{i-1})] : [\Pi m_i]; \quad i \text{ de } r+1 \text{ à } r+h.$$

Mais, en raison de la périodicité de c_i et de m_i , les deux produits $\Pi(\theta - c_j)$, et Πm_j ont des valeurs déterminées, quand j prend h valeurs entières successives quelconques, ce qui est le cas pour les deux termes du quotient précédent; sa valeur ω est donc indépendante de r et notamment est égale à l'expression de l'énoncé du théorème.

L'expression de $\rho_{r+\mu h}$ s'en déduit immédiatement, par récurrence sur μ (positif ou négatif).

La relation entre multiplicateurs et idéaux du cycle est alors exprimée par l'égalité:

le produit $\rho_i \times \mathbf{M}_i$, ou $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$, de chaque idéal $\mathbf{M}_i$, du cycle par le multiplicateur ρ_i , de même indice (défini, mod. h), ou par l'idéal principal (ρ_i) qui a ce multiplicateur pour base, est égal à l'idéal $\mathbf{M}_0$ d'indice nul (on a convenu $\rho_0 = 1$):

$$\rho_i \times \mathbf{M}_i \quad \text{ou} \quad (\rho_i) \times \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_0.$$

Il est équivalent de dire que l'idéal $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$ est un idéal invariant dont une expression est notamment $(1) \times \mathbf{M}_0$. On peut vérifier d'abord cette invariance lorsque i est remplacé par $i+1$. Elle résulte du rapprochement des deux relations de récurrence, entre les idéaux et entre

les multiplicateurs, qu'on peut remplacer par les idéaux principaux qui les ont pour bases :

$$(m_{i+1}) \times \mathbf{M}_i = (\theta - c_i) \times \mathbf{M}_{i+1}; \quad (\rho_i) \times (\theta - c_i) = (\rho_{i+1}) \times (m_{i+1});$$

en les multipliant membre à membre, puis en divisant par le produit des idéaux principaux $(m_{i+1}) \times (\theta - c_i)$, qui n'est pas nul, on obtient :

$$(\rho_i) \times \mathbf{M}_i = (\rho_{i+1}) \times \mathbf{M}_{i+1}.$$

La relation s'étend au remplacement de i par $i + \lambda$, par récurrence sur λ entier quelconque.

Si ρ_r (au lieu de ρ_0) était choisi égal à un élément γ du corps, la valeur commune des idéaux $(\rho_i) \times \mathbf{M}_i$ serait $(\gamma) \times \mathbf{M}_r$.

On déduit encore de cette propriété que les produits d'un idéal $\mathbf{M}_i$ par tous les multiplicateurs, d'indice $i + \lambda h$, sont égaux ; notamment :

$$\mathbf{M}_0 = (\rho_{\lambda h}) \times \mathbf{M}_0 = (\omega^\lambda) \times \mathbf{M}_0$$

THÉORÈME des diviseurs de l'unité (I). — *Les puissances et leurs opposés, $\pm \omega^\lambda$, de l'élément ω construit au moyen des idéaux $(m_j, \theta - c_j)$, semi réduits d'un cycle :*

$$\omega = [\Pi(\theta - c_j)] : [\Pi m_j]; \quad j \text{ de } 0 \text{ à } h-1; \quad \lambda \text{ entier};$$

sont des diviseurs de l'unité du corps (3).

L'égalité de $\mathbf{M}_0$ et de son produit par l'idéal principal (ω^λ) , exige que cet idéal soit égal à l'idéal unité (14) et par suite que sa base ω^λ , et l'opposé $-\omega^\lambda$ soient des diviseurs de l'unité du corps (11).

On montre ci-dessous que, réciproquement, tous les diviseurs de l'unité du corps sont obtenus ainsi; il en résulte notamment que les valeurs de $\pm \omega$, sont les mêmes pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, (48).

EXEMPLES. — Dans le corps de discriminant 145 (tableau XXII), les idéaux semi réduits, du cycle engendré par l'idéal unité peuvent être affectés des indices $(i, \text{ mod. } 3)$:

$$\mathbf{M}_0 = (1, \theta - 5); \quad \mathbf{M}_1 = (6, \theta); \quad \mathbf{M}_2 = (6, \theta - 5);$$

les racines étant, bien entendu finales. Les multiplicateurs sont :

$$\rho_0 = 1; \quad \rho_1 = (\theta - 5) : 6; \quad \rho_2 = \rho_1 \times (\theta : 6) = (\theta - 5) \times \theta : 36 = (-\theta + 6) : 6$$

Les autres multiplicateurs sont des produits de ceux là par des puissances de $\omega = \rho_3$, qui est égal à :

$$\omega = \rho_3 = \rho_2 \times (\theta - 5) : 1 = (-\theta + 6) \times (\theta - 5) : 6 = 2\theta - 11.$$

On vérifie aisément que ω et, par suite ses puissances et leurs opposées sont des diviseurs de l'unité; il suffit de calculer la norme de ω :

$$N(\omega) = \omega \times \omega' = (2\theta - 11) \times (2\theta' - 11) = -4 \times 36 + 22 + 121 = -1.$$

Pour le cycle de 5 idéaux :

$$\mathbf{M}_0 = (5, \theta - 2), \quad \mathbf{M}_1 = (6, \theta - 3), \quad \mathbf{M}_2 = (4, \theta - 4), \\ \mathbf{M}_3 = (4, \theta - 3), \quad \mathbf{M}_4 = (6, \theta - 2);$$

les multiplicateurs sont :

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = (\theta - 2) : 6, \quad \rho_2 = (-\theta + 7) : 4, \quad \rho_3 = (3\theta - 16) : 4, \\ \rho_4 = (-7\theta + 39) : 6; \quad \omega = \rho_5 = 2\theta - 11.$$

On retrouve la valeur précédente.

Dans le cas d'un cycle d'un seul idéal $(1, \theta - c)$, les multiplicateurs sont les puissances de :

$$\omega = \rho_1 = (\theta - c);$$

cet élément est d'ailleurs manifestement un diviseur de l'unité :

$$(\theta - c) \times (\theta' - c) = F(c) = -1.$$

46. Suite de bases d'un idéal semi réduit.

A un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i$ auquel est associé une suite de multiplicateurs ρ_i , on peut aussi associer une suite de bases, arithmétiques libres de l'idéal $\mathbf{M}_0$ (qui peut être choisi arbitrairement dans le cycle, ou même être remplacé par un idéal $(\gamma) \times \mathbf{M}_r$).

THÉORÈME de la suite des bases. — Dans l'idéal $\mathbf{M}_0$, d'un cycle d'idéaux semi réduits $\mathbf{M}_i = (m_i, \theta - c_i)$, on peut construire une suite, doublement illimitée, d'éléments α_i (entiers de $\mathbf{M}_0$), par les relations :

$$\alpha_i = m_i \times \rho_i = (\theta - c_{i-1}) \times \rho_{i-1}; \\ \alpha_{i+1} = m_{i+1} \times \rho_{i+1} = (\theta - c_i) \times \rho_i;$$