39. Exemples de vérification de corps principaux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Pour les *discriminants pairs*, elle n'est vérifiée que pour les valeurs 8 et 12 (polynômes fondamentaux $x^2—2$ et $x^2—3$); pour tous les autres, l'idéal, de norme 2 et de racine 0 ou 1 est réduit.

Elle est, d'autre part, vérifiée pour 9 corps, de *discriminants impairs* (et aucun autre inférieur à 1000), qui sont donnés dans le tableau XX. On remarquera que dans ceux de discriminants 21 et 77, il y a un idéal double, non réduit.

39. Exemples de vérification de corps principaux.

Dans certains cas, la considération des idéaux réduits suffit encore à constater que le corps est principal. Quelques exemples de calcul en sont donnés dans le tableau XXI, qui est disposé de la même façon que les tableaux X, XII, XVI, donnés en exemples de corps imaginaires. On a toutefois inscrits, en caractères gras, les normes des idéaux réduits.

Une première circonstance est l'*existence d'un seul couple d'idéaux réduits conjugués* (en plus de l'idéal unité), éventuellement égaux, *dont la décomposition d'une valeur ultérieure du tableau montre qu'ils sont principaux.*

Dans le corps, de discriminant 317 (première colonne du tableau XXI) les 3 seuls idéaux réduits sont l'idéal (1) et le couple d'idéaux conjugués (inégaux), de norme 7. La valeur $F(8) = —7$, montre qu'ils sont principaux $(\theta—8) = (7, \theta—8)$. La valeur antérieure $F(5) = —49$ montre aussi qu'ils sont congrus (idéal réfléchi, non réduit).

Pour le corps de discriminant pair $152 = 8\times 19$ (deuxième colonne du même tableau), les 2 seuls idéaux réduits sont (1) et l'idéal double de norme 2. La valeur $F(6) = —2$ montre que cet idéal est principal.

De telles vérifications peuvent se faire pour un assez grand nombre de corps de discriminants inférieurs à 1000, notamment:

impairs: 17, 33, 37, 41, 61, 69, 93, 101, 133, 149, 157, 197, 213, 237, 269, 317, 341, 413, 453, 461, 557, 677, 717, 773, 941;

pairs: 24, 28, 44, 56, 92, 152, 188, 248, 332, 668, 908.

TABLEAU XXI.

Exemples de corps réels principaux.

(Calculs avec les idéaux réduits.)

	$D = 317$ $r = 4$	$D = 152 = 8 \times 19$ $r = 3$	$D = 193$ $r = 3$	$D = 184 = 8 \times 23$ $r = 4$
$-F(0)$	79 $(\mathbf{1}, \theta)$	$38 = 2 \times 29$ $(\mathbf{1}, \theta)$ $(\mathbf{2}, \theta) = (\mathbf{2}, \theta')$	$48 = 2^4 \times 3$ $(\mathbf{1}, \theta)$ $(\mathbf{2}, \theta)$ $(\mathbf{2}, \theta')$ $(\mathbf{3}, \theta)$ $(\mathbf{3}, \theta')$ $(\mathbf{4}, \theta)$ $(\mathbf{4}, \theta')$ $(\mathbf{6}, \theta)$ $(\mathbf{6}, \theta')$	$46 = 2 \times 23$ $(\mathbf{1}, \theta)$ $(\mathbf{2}, \theta) = (\mathbf{2}, \theta')$
$-F(1)$	$77 = 7 \times 11$ $(\mathbf{7}, \theta-1)$ $(\mathbf{7}, \theta'-1)$	37	$46 = 2 \times 23$	$45 = 3^2 \times 5$ $(\mathbf{3}, \theta-1)$ $(\mathbf{3}, \theta'-1)$ $(\mathbf{5}, \theta-1)$ $(\mathbf{5}, \theta'-1)$
$-F(2)$	73	$34 = 2 \times 17$	$42 = 2 \times 3 \times 7$ $(\mathbf{6}, \theta-2)$ $(\mathbf{6}, \theta'-2)$	$42 = 2 \times 3 \times 7$ $(\mathbf{6}, \theta-2)$ $(\mathbf{6}, \theta'-2)$
$-F(3)$	67	29	36	37
$-F(4)$	59			30
$-F(5)$	$49 = 7 \times 7$		$18 = 6 \times 3$	
$-F(6)$		2	$6 = 2 \times 3$	$10 = 2 \times 5$
$-F(7)$				-3
$-F(8)$	7			
	$F(8)$: $(7, \theta-1) \sim (1)$	$F(6)$: $(2, \theta) \sim (1)$	$F(6)$: $(6, \theta) \sim (1)$ $F(5)$: $(6, \theta') \times (3, \theta') \sim (1)$ $F(6)$: $(2, \theta) \times (3, \theta) \sim (1)$	$F(7)$: $(3, \theta-1) \sim (1)$ $F(1)$: $(3, \theta-1)^2 \times (5, \theta-1) \sim (1)$ $F(6)$: $(2, \theta) \times (5, \theta-1) \sim (1)$

Une circonstance, moins évidente lorsqu'il existe plusieurs couples d'idéaux conjugués, est *l'existence de valeurs du tableau, dont les décompositions montrent successivement que certains des idéaux réduits sont principaux*, et qu'il en est, par suite de même de leurs produits mutuels, qui peuvent constituer tous les autres.

Dans le corps, de discriminant 193 (troisième colonne du tableau XVIII), il y a 11 idéaux réduits dont (1) et 5 couples d'idéaux conjugués différents. Les décompositions de $-F(6) = 1 \times 6$, $-F(5) = 6 \times 3$, et, à nouveau $-F(6) = 2 \times 3$ montrent successivement que: un des couples d'idéaux, de norme 6, puis le couple de norme 3, puis celui de norme 2 sont principaux. Il en résulte la même propriété pour le couple de norme 4 et l'autre couple de norme 6.

Dans le corps de discriminant 184 (quatrième colonne du même tableau), il y a 8 idéaux réduits, dont (1) et l'idéal double, de norme 2. Les décompositions de $-F(7) = 3 \times 1$, $-F(1) = 3^2 \times 5$, et $-F(6) = 2 \times 5$ montrent successivement que les idéaux, de norme 3, donc ceux de norme 3^2 (non réduits), puis ceux de norme 5, puis l'idéal double, de norme 2 sont principaux. Il en résulte la même propriété pour les deux autres idéaux réduits, de norme 6.

De telles vérifications peuvent se faire pour *presque tous les corps principaux*, de discriminant inférieur à 500 et pour un très grand nombre de ceux dont le discriminant est compris entre 500 et 1000. Les calculs sont, d'ailleurs, en général plus simples que dans le cas des corps imaginaires. Cette simplification tient, pour une part, au petit nombre de diviseurs des valeurs $F(c)$, pour c voisin des zéros (irrationnels) de ce polynôme.

On est ainsi conduit, pour « *distinguer* » des idéaux (ou des couples d'idéaux conjugués), à utiliser, *au lieu des racines minimums* (les plus proches de 0), les racines les plus proches des zéros (irrationnels) du polynôme, et comprises entre ces zéros (ou rendant $F(x)$ négatif) c'est-à-dire encore *les racines qui donnent à $-F(x)$ les plus petites* valeurs positives. C'est ce qui va être fait dans les considérations et les définitions suivantes.