3. Une interprétation du principe de Dirichlet

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

3. Une interprétation du principe de Dirichlet.

3. 1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine G des conducteurs parfaits $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ (fig. 2). J'écrirai $\gamma_0 = \Gamma_0$, $\gamma_n = \Gamma_1$. Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs γ_i, c'est-à-dire *si toutes les courbes* γ_i *sont des lignes de niveau de* φ (§ 2).

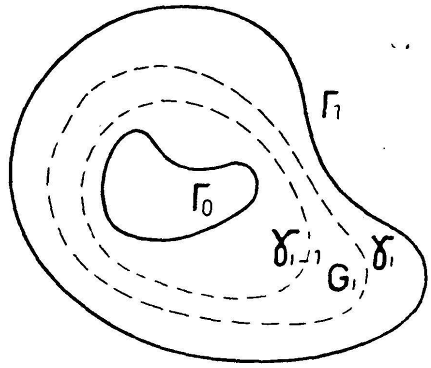

Fig. 2

Appelons $u(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\overline{I}$ l'intensité et $\overline{J}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $u = \text{const} = u_i$ sur la courbe γ_i; dans chaque bande G_i (entre γ_{i-1} et γ_i), $u(x, y)$ s'obtient à partir de u_{i-1} et u_i en résolvant un problème de Dirichlet ($i = 1, 2, \ldots, n$); les inconnues $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont déterminées par les $n - 1$ conditions de conservation de la charge:

$$\text{Flux à travers } G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On a encore $\overline{J} = V \cdot \overline{I} = \overline{I}$, donc

$$D(\varphi) = J = I \leqslant \overline{I} = \overline{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme *un système de* n *résistances* $R_i = R_{\gamma_{i-1}\gamma_i}$ *connectées en série* (fig. 3):

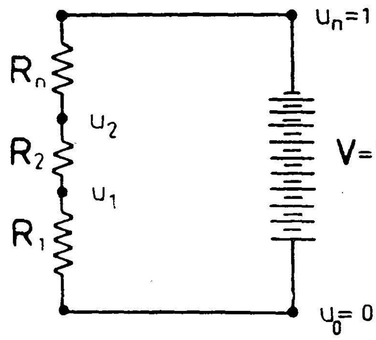

Fig 3

$$\frac{1}{\overline{I}} = \overline{R} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n .$$

3. 2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels » u_i s'établir librement sur les

conducteurs γ_i, nous imposons des potentiels arbitraires v_i. En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles R_i (fig. 4).

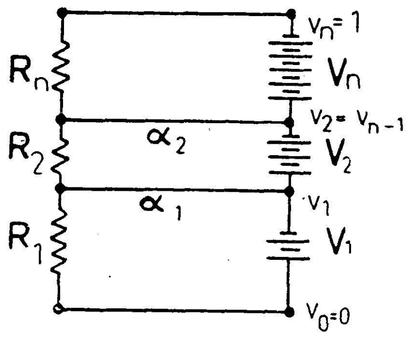

Fig. 4

Appelons $v(x, y)$ la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande G_i, d'un problème de Dirichlet), et $\bar{\bar{J}}$ la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

Il est intuitif que $\bar{\bar{J}} \geqslant \bar{J}$; *quand a-t-on l'égalité ?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire *si les potentiels intermédiaires imposés* v_i *sont égaux aux potentiels « naturels »* u_i. La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$v_i - v_{i-1} = V_i\,; \quad \sum_1^n V_i = 1\,;$$

$$\bar{\bar{J}} = D(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{R_i} \geqslant \frac{(\Sigma V_i)^2}{\Sigma R_i} = \frac{1}{\bar{\bar{R}}} = D(u) = \bar{I} = \bar{J}\,;$$

on a l'égalité si $\dfrac{V_i}{R_i}$ = const, c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque G_i: c'est précisément la condition qui, au § 3. 1, déterminait les u_i. On a donc

$$D(v) \geqslant D(u) \geqslant D(\varphi)\,.$$

3. 3. Le *principe de Dirichlet* exprime précisément l'inégalité $D(v) \geqslant D(\varphi)$ dans le cas limite où l'on a imposé *toutes* les lignes de niveau de v et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction v elle-même [1]). On n'a l'égalité que si $v = \varphi$.

---

1) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible v, on peut construire une borne supérieure $D(u)$ pour $D(\varphi)$, meilleure que $D(v)$: cf. G. Pólya et G. Szegö: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.