

# 3. Une interprétation du principe de Dirichlet

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE DIRICHLET.

3.1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine  $G$  des conducteurs parfaits  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  (fig. 2). J'écrirai  $\gamma_0 = \Gamma_0, \gamma_n = \Gamma_1$ . Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs  $\gamma_i$ , c'est-à-dire si toutes les courbes  $\gamma_i$  sont des lignes de niveau de  $\varphi$  (§ 2).

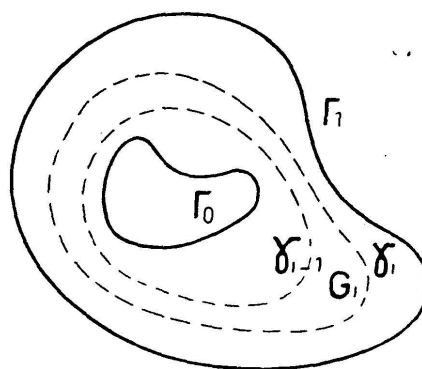


Fig. 2

Appelons  $u(x, y)$  le potentiel pour le problème modifié,  $\bar{I}$  l'intensité et  $\bar{J}$  la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a  $u = \text{const} = u_i$  sur la courbe  $\gamma_i$ ; dans chaque bande  $G_i$  (entre  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma_i$ ),  $u(x, y)$  s'obtient à partir de  $u_{i-1}$  et  $u_i$  en résolvant un problème de Dirichlet ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); les inconnues  $u_1, \dots, u_{n-1}$  sont déterminées par les  $n - 1$  conditions de conservation de la charge:

$$\text{Flux à travers } G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

On a encore  $\bar{J} = V \cdot \bar{I} = \bar{I}^2$ , donc

$$D(\varphi) = J = I \leq \bar{I} = \bar{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme un système de  $n$  résistances  $R_i = R_{\gamma_{i-1} \gamma_i}$  connectées en série (fig. 3):

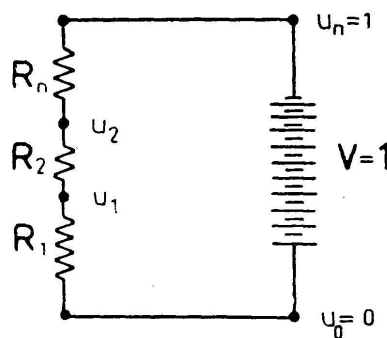


Fig 3

$$\frac{1}{\bar{I}} = \bar{R} = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

3.2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels »  $u_i$  s'établir librement sur les

conducteurs  $\gamma_i$ , nous imposons des potentiels arbitraires  $\varphi_i$ . En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles  $R_i$  (fig. 4).

Appelons  $\varphi(x, y)$  la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande  $G_i$ , d'un problème de Dirichlet), et  $\bar{J}$  la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

Il est intuitif que  $\bar{J} \geq \bar{J}$ ; quand a-t-on l'égalité? Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ , c'est-à-dire si les potentiels intermédiaires imposés  $v_i$  sont égaux aux potentiels « naturels »  $u_i$ . La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = V_i; \quad \sum_1^n V_i = 1;$$

$$\bar{J} = D(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{V_i^2}{R_i} \geq \frac{(\sum V_i)^2}{\sum R_i} = \frac{1}{R} = D(u) = \bar{I} = \bar{J};$$

on a l'égalité si  $\frac{V_i}{R_i} = \text{const}$ , c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque  $G_i$ : c'est précisément la condition qui, au § 3. 1, déterminait les  $u_i$ . On a donc

$$D(\varphi) \geq D(u) \geq D(\varphi).$$

3. 3. Le *principe de Dirichlet* exprime précisément l'inégalité  $D(\varphi) \geq D(\varphi)$  dans le cas limite où l'on a imposé toutes les lignes de niveau de  $\varphi$  et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction  $\varphi$  elle-même<sup>1)</sup>. On n'a l'égalité que si  $\varphi = \varphi$ .

1) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible  $v$ , on peut construire une borne supérieure  $D(u)$  pour  $D(\varphi)$ , meilleure que  $D(v)$ : cf. G. PÓLYA et G. SZEGÖ: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.

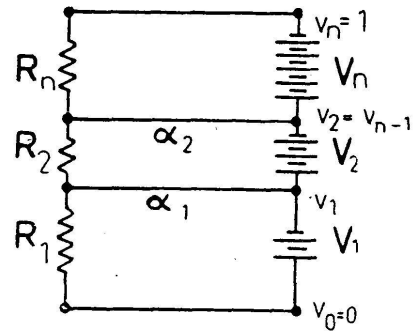


Fig. 4