SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE [1])

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante.* Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

1. 1. *Un problème de Dirichlet.*

Nous considérons la solution $\varphi\,(x, y)$ du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \begin{matrix} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{matrix} \;;$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D\,(\varphi) = \iint_G \operatorname{grad}^2 \varphi \, dxdy \; .$$

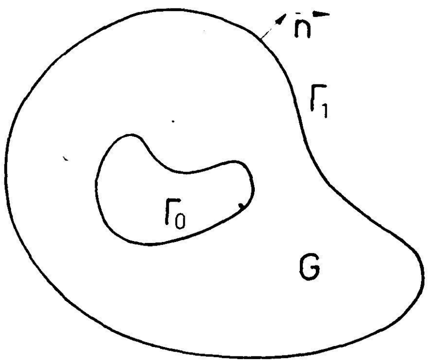

Fig. 1

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

Principe de Dirichlet:

Soit $\psi\,(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, et telle que

$$\begin{matrix} \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \psi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{matrix} \;;$$

alors $\quad D\,(\varphi) \leqslant D\,(\psi)\;.$

Principe de Thomson:

Soit $\vec{p}\;(x, y)$ un champ vectoriel dans G, sans sources: $\operatorname{div} \vec{p} = 0$; alors

$$D\,(\varphi) \geqslant \frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p}\,.\,\vec{n}\; ds\right)^2}{\iint\limits_G \vec{p}^{\,2}\; dxdy\;.}\;.$$

---

[1]) Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour Γ, nous cherchons un nombre positif λ_1 et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G, $\varphi = 0$ sur Γ.

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, φ la première fonction propre.

Principe de Rayleigh:

Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, qui s'annule sur Γ; alors

$$\lambda_1 \leqslant R[v] = \frac{D(v)}{\iint_G v^2\, dxdy} \cdot$$

Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?

$$\lambda_1 \geqslant ?$$

2. La conductibilité électrique d'une plaque homogène.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes Γ_0 et Γ_1; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point (x, y); on impose les potentiels 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \operatorname{grad} \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \operatorname{div} \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel φ est la solution du problème de Dirichlet du* § 1. 1.

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2\, dxdy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n}\, ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et $\vec{n}$ la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I} \cdot$$

3. Une interprétation du principe de Dirichlet.

3. 1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine G des conducteurs parfaits $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ (fig. 2). J'écrirai $\gamma_0 = \Gamma_0$, $\gamma_n = \Gamma_1$. Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs γ_i, c'est-à-dire *si toutes les courbes* γ_i *sont des lignes de niveau de* φ (§ 2).

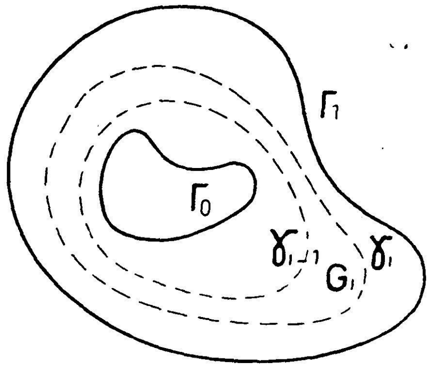

Fig. 2

Appelons $u(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\bar{I}$ l'intensité et $\bar{J}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $u = \text{const} = u_i$ sur la courbe γ_i; dans chaque bande G_i (entre γ_{i-1} et γ_i), $u(x, y)$ s'obtient à partir de u_{i-1} et u_i en résolvant un problème de Dirichlet ($i = 1, 2, \ldots, n$); les inconnues $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont déterminées par les $n - 1$ conditions de conservation de la charge:

$$\text{Flux à travers } G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On a encore $\bar{J} = V \cdot \bar{I} = \bar{I}$, donc

$$D(\varphi) = J = I \leqslant \bar{I} = \bar{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme *un système de* n *résistances* $R_i = R_{\gamma_{i-1}\gamma_i}$ *connectées en série* (fig. 3):

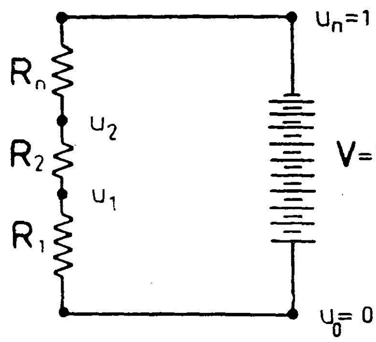

Fig 3

$$\frac{1}{\bar{I}} = \bar{R} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n .$$

3. 2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels » u_i s'établir librement sur les

conducteurs γ_i, nous imposons des potentiels arbitraires v_i. En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles R_i (fig. 4).

Appelons $v\,(x, y)$ la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande G_i, d'un problème de Dirichlet), et $\overline{\overline{J}}$ la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

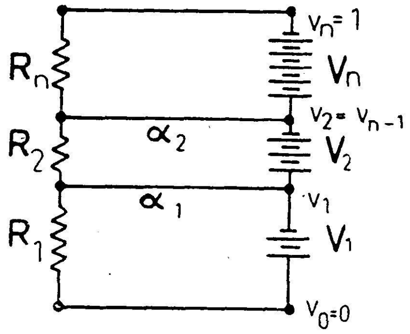

Fig. 4

Il est intuitif que $\overline{\overline{J}} \geqslant \overline{J}$; *quand a-t-on l'égalité ?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire *si les potentiels intermédiaires imposés* v_i *sont égaux aux potentiels « naturels »* u_i. La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$v_i - v_{i-1} = V_i\,; \quad \sum_1^n V_i = 1\,;$$

$$\overline{\overline{J}} = D(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{R_i} \geqslant \frac{(\Sigma\, V_i)^2}{\Sigma\, R_i} = \frac{1}{\overline{\overline{R}}} = D\,(u) = \overline{I} = \overline{J}\,;$$

on a l'égalité si $\dfrac{V_i}{R_i}$ = const, c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque G_i: c'est précisément la condition qui, au § 3. 1, déterminait les u_i. On a donc

$$D\,(v) \geqslant D\,(u) \geqslant D\,(\varphi)\,.$$

3. 3. Le *principe de Dirichlet* exprime précisément l'inégalité $D\,(v) \geqslant D\,(\varphi)$ dans le cas limite où l'on a imposé *toutes* les lignes de niveau de v et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction v elle-même [1]). On n'a l'égalité que si $v = \varphi$.

---

[1]) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible v, on peut construire une borne supérieure $D\,(u)$ pour $D\,(\varphi)$, meilleure que $D\,(v)$: cf. G. Pólya et G. Szegö: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.

4. Une interprétation du principe de Thomson.

4. 1. Modifions *d'une autre façon* le problème physique initial (§ 2): *Découpons en lanières* G_j *la plaque homogène* (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée ?* Lorsque, initialement, aucun courant $\vec{i} = \text{grad}\ \varphi$ ne traversait les coupures, c'est-à-dire *si toutes les coupures sont des lignes de flux de* grad φ (§ 2).

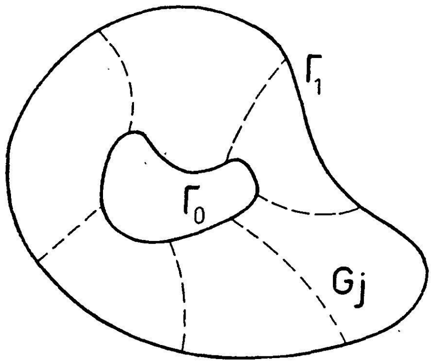

Fig. 5

Appelons $w\,(x, y)$ le potentiel pour le problème modifié, $\tilde{I}$ l'intensité totale et $\tilde{J}$ la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a $w = 0$ sur Γ_0, $w = 1$ sur Γ_1, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sur les coupures, $\Delta w = 0$ dans chaque G_j.

On a encore $\tilde{J} = V \cdot \tilde{I} = \tilde{I}$, donc $D(\varphi) = J = I \geqslant \tilde{I} = \tilde{J} = D(w)$.

Notre plaque se comporte à présent comme un *système de résistances* $R_1, R_2, \ldots, R_m$ *connectées en parallèle:*

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^{m} \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j} \qquad (\text{car } V = 1).$$

Appelons w_j la restriction de w à G_j;

$$\tilde{J}_j = D(w_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial w_j}{\partial n}\, ds = \tilde{I}_j,$$

où Γ_{1j} est la partie de Γ_1 qui borde G_j.

4. 2. Considérons le cas limite où les lanières G_j sont de largeur infinitésimale. Le découpage de G est alors équivalent à un *choix des lignes de flux* d'un champ vectoriel. Soit $\vec{p}$ un tel champ, *de divergence nulle*; la direction de $\vec{p}$ est déterminée en

tout point; sa grandeur $p = p(s)$ est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation div $\vec{p} = 0$ est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour $p(s)$; une solution est grad w (c'est-à-dire: grad w_j dans la bande infinitésimale G_j); donc, dans G_j, $\vec{p} = t_j$ grad w_j (t_j est constante dans G_j). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2\, dx dy} = \frac{\left[\sum_j t_j \mathrm{D}(w_j)\right]^2}{\sum_j t_j^2 \mathrm{D}(w_j)} \leqslant \sum_j \mathrm{D}(w_j) =$$

$$= \mathrm{D}(w) = \mathrm{I} \leqslant \mathrm{I} = \mathrm{J} = \mathrm{D}(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. Un passage Thomson $\longrightarrow$ Dirichlet, à l'aide des lignes de niveau $\bar{\gamma}$ d'une fonction v concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons $\vec{p}$ en imposant $\oint_\gamma \vec{p} \cdot \vec{n}\, ds = 1$ pour *toute* courbe fermée γ séparant Γ_0 de Γ_1; pour *ces* champs concurrents $\vec{p}$, on a

$$\mathrm{D}(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2\, dx dy\right)^{-1} .$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n}\, ds = 1$ pour les seules lignes de niveau $\bar{\gamma}$ de v; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left(\iint_G \vec{p}^2\, dx dy\right)^{-1} ;$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à $\mathrm{D}(u)$ (cf. § 3. 1), donc $\mathrm{D}(\varphi) \leqslant \mathrm{D}(u) \leqslant \mathrm{D}(v)$, et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.

6. Un passage Dirichlet ⟶ Thomson, à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel $\vec{p}$ concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières G_j par des lignes de flux $\varkappa$ de $\vec{p}$, comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \mathrm{Min}_v D(v), \ v \text{ continue dans G, lisse par morceaux } = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0 , \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1 , \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures $\varkappa$; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière G_j: le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) .$$

Soit $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à G_j, et soit de nouveau w_j la solution du problème mixte dans G_j: $w_j = 0$ sur Γ_{0j}, $w_j = 1$ sur Γ_{1j}, $\dfrac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures $\varkappa$.

$$\mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) = \sum_j \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{v}_j) = \sum_j D(w_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n}\, ds = D(w),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières G_j de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p} \,.\, \vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^{\,2}\, dx dy} \leqslant D(w) ,$$

donc $\leqslant D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine G du § 1.2 en sous-domaines G_j (fig. 6).

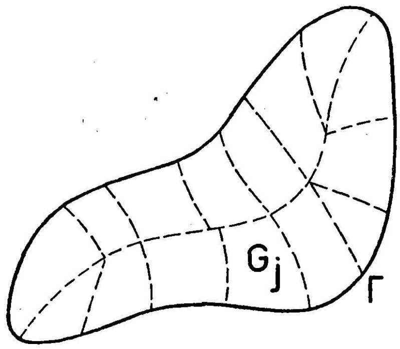

Fig. 6

Dans le principe de Rayleigh

$\lambda_1 = \mathrm{Min}_v \, R[v]$, v continue dans G, lisse par morceaux, $= 0$ sur Γ,

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} \, R[\tilde{v}] \; ;$$

appelons $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à G_j.

Soient, dans G_j, ξ_j la première valeur propre et w_j la fonction propre correspondante, d'une membrane G_j liée le long de Γ_j, libre sur les « coupures »; on a $\Delta w_j + \xi_j w_j = 0$ et $w_j > 0$ dans G_j, $w_j = 0$ sur Γ_j, $\dfrac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures; $\xi_j = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} \, R[\tilde{v}_j]$. Donc

$$\lambda_1 \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} \, R[\tilde{v}] = \mathrm{Min}_{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{v}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{v}_j^2 \, dx\,dy} = \min_j \xi_j \; .$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de grad φ (φ étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1. 2), w_j est simplement la restriction de φ à G_j et l'on a, pour tout j,

$$\xi_j = R[w_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énonçer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \mathrm{Max}_{\text{découpages de G en lanières } G_j} \min_j \xi_j \; . \qquad {}^{1)}$$

1) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, *248*, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes G_j de largeur infinitésimale, on a, dans chaque G_j, un problème à une seule variable indépendante, car $w_j = w_j(s)$.

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les ξ_j. Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.