

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

To verify this we need slight extensions of Lemma 2, and of the fact that derivatives possess the Darboux property.

LEMMA 2'. If  $f$  is continuous and  $f'$  exists (finite or infinite) in  $(p, q)$ , while  $f(p^+)$  does not exist (finite or infinite); if  $G$  is continuous in  $[p, q)$ ,  $G'$  exists (finite) in  $(p, q)$  and  $G'(x) \neq 0$  in  $(p, q)$ ; then  $f'(x)/G'(x)$  assumes every finite value in  $(p, q)$ .

Since  $f(p^+)$  does not exist,  $H(x) = f(x) - \lambda G(x)$  does not approach a limit (since  $G(p^+)$  does exist). Hence  $H$  is not monotonic and so possesses extrema. At an extremum  $\xi$  we have  $H'(\xi) = 0$ , so  $f'(\xi) = \lambda G'(\xi)$ . Since  $G'(\xi)$  is neither 0 nor infinite,  $f'(\xi)/G'(\xi) = \lambda$ .

LEMMA 3. If  $f$  and  $G$  are continuous in  $[p, q]$ ; if  $f'$  exists (finite or infinite) in  $[p, q]$ , and  $G'$  exists (finite) in  $[p, q]$ ; if  $f'(p)$  and  $f'(q)$  are finite and  $G'$  has a fixed sign (and hence is never 0) in  $[p, q]$ ; and if

$$f'(p)/G'(p) < c < f'(q)/G'(q),$$

then there is a  $\xi$  in  $(p, q)$  such that  $f'(\xi)/G'(\xi) = c$ .

This says in effect that  $f'/G'$ , like  $f'$ , has the Darboux property.

Consider  $H(x) = f(x) - cG(x)$  and suppose for definiteness that  $G'(p) > 0$ . Then  $H'(p) < 0$ ,  $H'(q) > 0$ , so the continuous function  $H$  cannot assume its minimum at  $p$  or  $q$ . If  $H$  assumes its minimum at  $\xi$ , we have  $f'(\xi) = cG'(\xi)$  and so (since  $G'(\xi)$  is neither zero nor infinite),  $f'(\xi)/G'(\xi) = c$ .

It now follows just as before that Theorems 1 and 2 hold, with  $g = 1/G'$  in (2).

#### REFERENCES

1. GODEFROID, M., Remarque su la formule de Taylor. *Enseignement math.* (2) 4 (1958), 120-123.
2. HARTMAN, P. Remark on Taylor's formula. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 731-732.
3. HOBSON, E. W., *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. Cambridge University Press, vol. 1, 3d ed., 1927; vol. 2, 2d ed., 1926.