SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor(en): **Kahane, Jean-Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35474

SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

Jean-Pierre KAHANE (Montpellier)

(Reçu le 16 juin 1958)

Un exemple très simple de fonction continue sans dérivée a été donné par M. G. de Rham dans l'*Enseignement mathématique* (III, 1, 1957, p. 71-72). Il s'agit de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x) \tag{1}$$

où

$$\varphi(x) = |x| \quad \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) .$$

Cet exemple se prête à des remarques intéressantes [1]. En premier lieu, nous mettrons en évidence les ensembles de points où f admet un extremum (minimum relatif, maximum, maximum relatif); c'est là un simple exercice, pouvant illustrer un cours d'analyse. En second lieu, nous verrons que l'exemple de M. de Rham, à peine modifié, témoigne qu'aucune condition de majoration sur le module de continuité d'une fonction, strictement plus faible que la condition de Lipschitz, n'assure la dérivabilité fut-ce en un seul point. Enfin, une modification supplémentaire permet de construire facilement une fonction continue dont le module de continuité en chaque point est « aussi mauvais qu'on veut ».

---

[1] C'est ainsi que M. de Vito a montré, dans le vol. IV, fasc. 3, que f appartient à la classe Lip α pour tout α positif inférieur à 1. Notre remarque n° 3 apporte une précision à l'observation faite par M. de Rham, et rapportée par M. de Vito, qu'on peut construire des fonctions continues sans dérivées, n'appartenant à aucune classe Lip α.

1. Points où f admet un extremum.

Soit

$$x = \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \tag{2}$$

un développement de x en numération binaire (il y en a deux quand x est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \varphi(2^k x) . \tag{3}$$

Minima relatifs.

Si $a = \ldots, a_1 a_2 \ldots a_n = p 2^{-n}$ (p entier), on a $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \ldots = f(a)$ et réciproquement. Pour m assez grand ($m \geqslant 2n$), f_m admet en a un minimum relatif; comme $f \geqslant f_m$ et $f(a) = f_m(a)$, f admet également en a un minimum relatif. Inversement, si $f(x)$ est le minimum de f sur un segment $[a, a'] = [p 2^{-n}, (p+1) 2^{-n}]$, n impair, les relations

$$f(x) \geqslant f_{n-1}(x) \ , \quad f(a) = f_{n-1}(a) \ , \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que f_{n-1} est linéaire et non constant sur $[a, a']$, entraînent que $x = a$ ou $x = a'$.

Donc l'*ensemble des points où* f *admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires* $p 2^{-n}$. C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

Maximum.

On a $f(x) = \sum_{0}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$. Or $f_1(4^k x)$ est maximum, et égal à 1, si et seulement si $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ (pour au moins un développement de x sous la forme (2)).

Donc *l'ensemble des points où* f *atteint son maximum, égal à 4/3, est l'ensemble des* x, *de la forme* (2), *satisfaisant* $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ *pour* $k = 0, 1, \ldots$ C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

Maxima relatifs.

On a

$$f(x) = f_{2n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x) . \qquad (4)$$

Pour que x soit un point où f admet un maximum relatif, il suffit donc que f_{2n-1} soit constant au voisinage de x, et que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$; la première condition équivaut à $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$, la seconde, comme on l'a vu, à $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ $(k \geqslant n)$.

Inversement, soit x un point où f admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$. Sinon, en effet, $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n$ garde un signe constant pour n assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe $+$; soit I_n le segment rectiligne du graphe de f_{n-1} qui se projette sur l'axe des x suivant le segment $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ contenant x; pour n assez grand, I_{n+1} est à gauche de I_n, donc I_{n+j} est à gauche de I_n $(j \geqslant 1)$, donc le point $(x, f(x))$ est à gauche de I_n; comme I_n est une corde du graphe de f, $f(x)$ n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un n tel que $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} = n$, et tel que, sur l'intervalle contenant x où f_{2n-1} est constant, $f(x)$ soit le maximum de f. D'après (4), il s'ensuit que $f_1(4^k x) = 1$ pour $k \geqslant n$.

Ainsi, l'ensemble des points où f *admet un maximum relatif est l'ensemble des* x, *de la forme (2), satisfaisant les égalités* $\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \ldots + x_{2k} = \mathrm{k}$ *pour* k *assez grand.* C'est un F_σ, dense sur la droite, de mesure nulle.

2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée, dont le module de continuité satisfait $\omega(h) \leqslant \chi(h)$, χ étant une fonction donnée.

Si $\underline{\lim}_{h \to 0}\, h^{-1} \chi(h) < \infty$, l'inégalité $\omega(h) \leqslant \chi(h)$ entraîne que la fonction est lipschitzienne [2]), donc admet une dérivée presque

---

[2]) En vertu de l'inégalité $\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)$, valable pour tout $\delta > 0$ et tout entier naturel n.

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que $\lim_{h\to\infty} h^{-1}\chi(h) = \infty$. Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-k_\nu} \varphi(2^{k_\nu} x) \tag{5}$$

où k_ν est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que g n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < \nu h + 2 \cdot 2^{-k_\nu+1} \text{ pour tout } \nu .$$

Soit $\omega(h)$ le module de continuité de g; pour $2^{-k_\nu+1} \leqslant h < 2^{-k_\nu}$, on a $\omega(h) < (\nu + 2) h$.

Quitte à diminuer $\chi(h)$, on peut supposer $h^{-1}\chi(h) \uparrow \infty$ et $\chi(h) \downarrow 0$ quand $h \downarrow 0$. Il suffit alors de choisir $\{k_\nu\}$ de sorte que $\nu + 2 < 2^{k_\nu}\chi\left(2^{-k_\nu}\right)$ pour avoir $\omega(h) < \chi(h)$ pour tout $h > 0$.

Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.

3. Exemple d'une fonction continue, dont le module de continuité en chaque point est minoré par une fonction donnée.

Soit $h > 0$, $\psi(h)$ une fonction positive tendant vers zéro quand $h \downarrow 0$. Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité $\omega_x(h)$ satisfait en chaque point x

$$\omega_x(h) > \psi(h) \tag{6}$$

quitte à majorer $\psi(h)$, on peut supposer ψ croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu 2^{-k_\nu} \varphi(2^{k_\nu} x) \tag{7}$$

où $\{k_\nu\}$ et $\{p_\nu\}$ sont des suites croissantes de nombres positifs, à déterminer. Vu la croissance de ψ, (6) est satisfaite dès que, pour tout ν,

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > \psi(2^{-k_{\nu-1}}) = \varepsilon_\nu . \tag{8}$$

Or un calcul immédiat donne

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > 2^{-k_\nu}\left(\frac{1}{4}p_\nu - p_{\nu-1} - p_{\nu-2} \cdots - p_1\right) - \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j\, 2^{-k_j} .$$

Donc (8) est vérifiée dès que, pour chaque j, on a

$$p_j > 13\, p_{j-1}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } p_{\nu-1} + p_{\nu-2} + \dots p_1 < \frac{1}{12}\, p_\nu\right)$$

$$p_{j+1} \cdot 2^{-k_{j+1}} < \frac{1}{13}\, p_j\, 2^{-k_j}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j\, 2^{-k_j} < \frac{1}{12}\, p_\nu\, 2^{-k_\nu}\right)$$

$$p_j\, 2^{-k_j} \geqslant 12\, \varepsilon_j$$

Pour cela, il suffit de choisir k_j de sorte que 1° $\varepsilon_{j+1} < \frac{1}{13}\,\varepsilon_j$; 2° $2^{k_j}\,\varepsilon_j > 13\; 2^{k_{j-1}}\,\varepsilon_{j-1}$ (ces inégalités permettent le choix de k_j, une fois fixés k_{j-1} et k_{j-2}), puis, de choisir $p_j = 12\,.\,2^{k_j}\,\varepsilon_j$.

Le lecteur aura remarqué que dans ce § 3 la fonction φ pourrait être remplacée par n'importe quelle fonction périodique lipschitzienne, non constante. En fait, les considérations du § 3 se rattachent autant à l'exemple classique de Weierstrass qu'à celui de M. de Rham, au contraire de celles du § 2.