2. Le problème de l'unicité.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

et on voit, dans ce cas, en prenant pour n des puissances successives de 3, que c_n ne tend pas vers zéro pour $n \to \infty$. Nous reviendrons plus loin sur le cas d'un rapport constant ξ quelconque, qui est plus complexe.

2. Le problème de l'unicité.

On peut le poser de la manière suivante. Existe-t-il sur $(0, 2\pi)$ des ensembles E tels qu'une série trigonométrique

$$\sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge vers zéro partout hors de E, sans être identiquement nulle ? Et, si oui, caractériser ces ensembles, qui sont dits « ensembles de multiplicité ». Un ensemble E tel que toute série trigonométrique convergeant vers zéro dans le complémentaire de E soit identiquement nulle est dit « ensemble d'unicité ».

Cantor a démontré par des méthodes célèbres que si E est vide, ou composé d'un nombre fini de points, E est un ensemble d'unicité. C'est aussi le cas si le dérivé de E est fini. Plus généralement, Cantor a démontré que tout ensemble réductible (c'est-à-dire admettant un dérivé vide de n'importe quel ordre, fini ou transfini) est un ensemble d'unicité.

Beaucoup plus tard, Young a démontré que tout ensemble dénombrable est un ensemble d'unicité.

Par contre, il est très facile de voir que tout ensemble E de mesure positive est un ensemble de multiplicité (il suffit de considérer la série de Fourier de la fonction caractéristique d'un ensemble parfait P de mesure positive contenu dans E).

La question de savoir s'il existait des ensembles de multiplicité de mesure nulle a été résolu par Menchoff en 1916; Menchoff a construit un ensemble parfait P de mesure nulle (du type de Cantor, à rapport variable) et une série trigonométrique non identiquement nulle convergeant vers zéro dans tout intervalle contigu à P.

Ceci a posé la question de la classification des ensembles parfaits de mesure nulle en ensembles d'unicité (ensembles U) et ensembles de multiplicité (ensembles M).

Avant de poursuivre, indiquons que si on considère le problème du point de vue de la convergence simple (et non du point de vue d'une méthode de sommabilité), ce n'est pas parce que la convergence simple est plus importante, mais c'est parce que c'est le problème de la convergence simple qui soulève les questions les plus intéressantes dans la classification des ensembles entre ensembles U et ensembles M.

3. Les ensembles du type H et les résultats de Rajchman.

Quelques années après le résultat de Menchoff, Rajchman a découvert toute une catégorie d'ensembles parfaits de mesure nulle qui sont des ensembles U.

Soit E un ensemble porté par le tore de longueur 1. S'il existe une suite d'entiers $\{ n_k \}_{k=1}^{\infty}$ tels que pour tout $x \in$ E et pour tout k le point $n_k\, x$ (réduit modulo 1) n'appartienne jamais à un certain intervalle J, l'ensemble est dit du type H. Ainsi l'ensemble classique de Cantor à rapport constant $\xi = 1/3$ est du type H. Il suffit de prendre $n_k = 3^k$.

Rajchman a démontré que tout ensemble du type H (ces ensembles sont nécessairement de mesure nulle) est un ensemble U.

Nina Bary a démontré que l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles U *fermés* est encore un ensemble U.

4. Les méthodes.

D'après la théorie classique de Riemann, pour démontrer qu'un ensemble parfait P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction F (x) non constante, mais constante dans chaque intervalle contigu à P et ayant des coefficients de Fourier qui soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$. La série obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier de f converge alors vers zéro dans tout intervalle contigu à P. On démontre aussi que l'existence d'une telle fonction f est nécessaire, si P est un ensemble M.

En particulier f peut être à variation bornée; dans ce cas