

IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction $L(r)$.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si $|h| < |g|$ le \log^+ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le \log^+ est égal à $\log \left| \frac{h}{g} \right| = \log |h| - \log |g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log |c_q| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

IV. CARACTÉRISTIQUE DE SHIMIZU-AHLFORS.
FONCTION $L(r)$.

47. Aire couverte par les valeurs de $f(z)$.

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leq r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au n° 42. Lorsque z parcourt le cercle $|z| \leq r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX dY$ du plan des X, Y ($Z = X + iY$) correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX dY}{(1 + |Z|^2)^2}.$$

D'autre part, à l'élément d'aire $t dt d\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan z , la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX dY = |f'(z)|^2 t dt d\varphi.$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2} t dt d\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2} t dt d\varphi. \tag{1}$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent

l'image de Z . On a donc aussi

$$\pi S(r) = \int_{\Sigma} \int n(r, Z) d\omega_Z \quad (2)$$

$d\omega_Z$ étant l'élément d'aire de la sphère Σ au point image de Z . En remplaçant r par $t \leq r$, divisant par t et intégrant de 0 à r , on obtient

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \int N(r, Z) d\omega_Z$$

et d'après le théorème de Shimizu du n° 42, cette quantité est égale à la fonction $T(r, f)$ à une constante additive près qui est bornée quel que soit r . Il est donc loisible de prendre comme fonction caractéristique, à la place de $T(r, f)$ la fonction

$$\int_0^r \frac{S(t)}{t} dt$$

dont la dérivée donnée par (1) ou (2) a une interprétation géométrique simple. C'est ce qui avait été proposé par Bloch et a été utilisé systématiquement par Shimizu et Ahlfors⁴³⁾.

48. Fonction $L(r)$.

Lorsque le point z décrit la circonférence $|z| = r$, l'image sphérique de $Z = f(z)$ décrit une courbe $\Gamma = \Gamma_r$, qui est la frontière de la surface de Riemann décrite par Z et dont l'aire est $\pi S(r)$. Ahlfors a introduit, à côté de la fonction $S(r)$, la longueur $L(r)$ de cette courbe Γ_r . A l'élément d'arc $rd\varphi$ de la circonférence C_r , $|z| = r$, la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément $|f'(re^{i\varphi})| rd\varphi$ et l'on a sur la sphère un élément

$$\frac{|f'(re^{i\varphi})| rd\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}$$

Par conséquent,

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})| rd\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2} \quad (3)$$

49. *Inégalité fondamentale.*

D'après l'égalité (1), on a

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)^2} r d\varphi \quad (4)$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (3), et tenant compte de (4)

$$L(r)^2 \leq \pi \frac{dS}{dr} 2\pi r .$$

Ainsi

$$L(r)^2 \leq 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} . \quad (5)$$

On déduit de cette inégalité que, si le point à l'infini est point essentiel, $L(r)$ est en général infiniment petit par rapport à $S(r)$. Car, admettant toujours, comme au n° 43, le théorème de Picard, $T(r, f)/\log r$ n'est pas borné, donc $S(r)$ n'est pas bornée. Si $S(r)$ n'est pas borné, et si l'on suppose que dans certains intervalles, pour lesquels $r > r_0$, on a

$$L(r) > S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \quad \varepsilon > 0 ,$$

on a, dans ces intervalles, d ,

$$\frac{dr}{r} \leq 2\pi^2 \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} ,$$

$$\int_d \frac{dr}{r} \leq \frac{2\pi^2}{2\varepsilon S(r_0)^{2\varepsilon}}$$

la variation totale de $\log r$ dans ces intervalles est finie. Ainsi, à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ est finie, on a

$$L(r) < S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \quad \varepsilon > 0 .$$

(A suivre).