IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Si $|h| < |g|$ le $\log^+$ dans $m(r, \infty)$ est nul; si $|h| > |g|$ le $\log^+$ est égal à $\log\left|\frac{h}{g}\right| = \log|h| - \log|g|$. Par suite, on a

$$T(r, f) = \log|c_q| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \lambda(re^{i\varphi})\, d\varphi\ ,$$

$\lambda(z)$ étant le plus grand des deux nombres $|h(z)|$ et $|g(z)|$.

IV. Caractéristique de Shimizu-Ahlfors. Fonction L (r).

47. *Aire couverte par les valeurs de* f (z).

Considérons la fonction $Z = f(z)$ méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et représentons les points Z sur la sphère de diamètre 1 déjà envisagée au nº 42. Lorsque z parcourt le cercle $|z| \leqslant r$, le point Z décrit une surface de Riemann transposée sur la sphère, c'est en général une surface à plusieurs feuillets. Nous appellerons $\pi S(r)$ l'aire totale de ces feuillets. On a vu que, à l'élément d'aire $dX\, dY$ du plan des X, Y $(Z = X + iY)$ correspond sur la sphère un élément d'aire

$$d\omega = \frac{dX\, dY}{(1 + |Z|^2)^2}\ .$$

D'autre part, à l'élément d'aire $t dt d\varphi$ du point $te^{i\varphi}$ du plan z, la fonction $Z = f(z)$ fait correspondre l'élément d'aire

$$dX\, dY = |f'(z)|^2\, t\, dt\, d\varphi\ .$$

On a donc, sur la sphère,

$$d\omega = \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2}\, t dt d\varphi$$

et

$$\pi S(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(te^{i\varphi})|^2)^2}\, t\, dt\, d\varphi\ . \qquad (1)$$

Le second membre peut s'écrire autrement; $n(r, Z)$ est le nombre des feuillets de la surface de Riemann sphérique qui recouvrent l'image de Z. On a donc aussi

$$\pi \mathrm{S}(r) = \int\!\!\int_{\Sigma} n(r, \mathrm{Z})\, d\omega_{\mathrm{Z}} \tag{2}$$

$d\omega_{\mathrm{Z}}$ étant l'élément d'aire de la sphère Σ au point image de Z. En remplaçant r par $t \leqslant r$, divisant par t et intégrant de 0 à r, on obtient

$$\int_0^r \frac{\mathrm{S}(t)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int\!\!\int_{\Sigma} \mathrm{N}(r, \mathrm{Z})\, d\omega_{\mathrm{Z}}$$

et d'après le théorème de Shimizu du n° 42, cette quantité est égale à la fonction $\mathrm{T}(r, f)$ à une constante additive près qui est bornée quel que soit r. Il est donc loisible de prendre comme fonction caractéristique, à la place de $\mathrm{T}(r, f)$ la fonction

$$\int_0^r \frac{\mathrm{S}(t)}{t}\, dt$$

dont la dérivée donnée par (1) ou (2) a une interprétation géométrique simple. C'est ce qui avait été proposé par Bloch et a été utilisé systématiquement par Shimizu et Ahlfors [43].

48. *Fonction* L (r).

Lorsque le point z décrit la circonférence $|z| = r$, l'image sphérique de $\mathrm{Z} = f(z)$ décrit une courbe $\Gamma = \Gamma_r$, qui est la frontière de la surface de Riemann décrite par Z et dont l'aire est $\pi \mathrm{S}(r)$. Ahlfors a introduit, à côté de la fonction $\mathrm{S}(r)$, la longueur $\mathrm{L}(r)$ de cette courbe Γ_r. A l'élément d'arc $r d\varphi$ de la circonférence C_r, $|z| = r$, la transformation $\mathrm{Z} = f(z)$ fait correspondre l'élément $|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi$ et l'on a sur la sphère un élément

$$\frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{L}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|\, r d\varphi}{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}. \tag{3}$$

49. *Inégalité fondamentale.*

D'après l'égalité (1), on a

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|^2}{(1 + |f(re^{i\varphi})|^2)^2} r d\varphi \tag{4}$$

et, en appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale (3), et tenant compte de (4)

$$L(r)^2 \leqslant \pi \frac{dS}{dr} 2\pi r .$$

Ainsi

$$L(r)^2 \leqslant 2\pi^2 r \frac{dS}{dr} . \tag{5}$$

On déduit de cette inégalité que, si le point à l'infini est point essentiel, L (r) est en général infiniment petit par rapport à S (r). Car, admettant toujours, comme au n° 43, le théorème de Picard, T (r, f)/logr n'est pas borné, donc S (r) n'est pas bornée. Si S (r) n'est pas borné, et si l'on suppose que dans certains intervalles, pour lesquels $r > r_0$, on a

$$L(r) > S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 ,$$

on a, dans ces intervalles, d,

$$\frac{dr}{r} \leqslant 2\pi^2 \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} ,$$

$$\int_d \frac{dr}{r} \leqslant \frac{2\pi^2}{2\varepsilon S(r_0)^{2\varepsilon}}$$

la variation totale de logr dans ces intervalles est finie. Ainsi, à l'extérieur d'intervalles dans lesquels la variation totale de logr est finie, on a

$$L(r) < S(r)^{\frac{1}{2} + \varepsilon} , \qquad \varepsilon > 0 .$$

(A suivre).