III. Décomposition en facteurs et conséquences.

On peut déduire de là une valeur approchée de M (r) au moyen de F (r) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_0^p A_n r^n\right)^2 \leqslant (p+1)\sum_0^p A_n^2 r^{2n} .$$

D'après une remarque du n° 12, il suffit de prendre $p + 1$ de la forme

$$\left[\nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right)\right]^{1+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0$$

pour que le premier membre soit asymptotiquement supérieur à M $(r)^2$. Dans le cas de l'ordre fini ρ, on obtient ainsi les inégalités de Brinkmeier

$$F(r) < G(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon} < M(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}$$

valables à partir d'une valeur $r(\varepsilon)$ de r [6].

En utilisant la même méthode et les résultats de la méthode de Wiman et Valiron (*Lectures on the general theory of integral functions*, chap. IV), on obtient de même les inégalités

$$F(r) < G(r)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{4}+\varepsilon}, \qquad F(r) < G(r)\,[\log B(r)]^{\frac{1}{4}+\varepsilon},$$

$$F(r) < G(r)\, r^{\frac{\rho}{4}+\varepsilon},$$

valables, les premières pour toute fonction entière, la troisième pour une fonction d'ordre fini ρ, sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ est finie [7].

III. Décomposition en facteurs et conséquences.

18. *Théorème de Jensen. Application aux fonctions entières d'ordre fini.*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et supposons que l'origine ne soit ni zéro, ni pôle et que la circonférence $|z| = x$ ne contienne ni zéro, ni pôle. Si $n(x)$ désigne le nombre des zéros et $p(x)$ le nombre des pôles dont le module est inférieur à x, chaque zéro ou pôle étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, on sait que, d'après le théorème des résidus

$$n(x) - p(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} x e^{i\varphi} i \, d\varphi$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{n(x)}{x} - \frac{p(x)}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} e^{i\varphi} \, d\varphi \, .$$

Intégrons entre x' et x'' les deux membres de cette égalité en supposant d'abord que la couronne $x' \leqslant |z| \leqslant x''$ ne contienne ni pôles, ni zéros. Nous obtenons

$$\int_{x'}^{x''} \frac{n(x)}{x} dx - \int_{x'}^{x''} \frac{p(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{f(x'' e^{i\varphi})}{f(x' e^{i\varphi})} d\varphi$$

et, puisque le premier membre est réel, nous pourrons mettre au second membre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(x'' e^{i\varphi})| - \log |f(x' e^{i\varphi})| \, d\varphi \, .$$

En outre, pour un pôle ou zéro de $f(z)$, $\log |f(z)|$ a un infini logarithmique, la formule reste donc valable si les circonférences $|z| = x'$ et $|z| = x''$ renferment des pôles ou des zéros; $n(x)$ et $p(x)$ seront les nombres de zéros et de pôles de module au plus égal à x. En ajoutant les formules ainsi obtenues dans les couronnes limitées par les cercles de centre origine passant par les zéros et les pôles, on obtient

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx - \int_0^r \frac{p(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi - \log |f(0)| \, . \quad (1)$$

C'est la formule de Jensen. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent les zéros, chacun figurant un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, on sait d'après le nº 11 que

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \log \frac{r^n}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|} \cdot \tag{2}$$

Dans le cas où $f(z)$ admettrait, par exemple, un zéro d'ordre q à l'origine, on appliquerait la formule (1) à $f(z)\,z^{-q}$.

Appliquons la formule (1) au cas d'une fonction entière d'ordre fini ρ; $n(x)$ désignant alors le nombre des zéros non nuls de module inférieur à x, nous obtenons, si $r > 1$

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^q}\,d\varphi + C < \log M(r) + C\,, \tag{3}$$

C étant une constante; donc si petit que soit ε positif, on a, pour r assez grand,

$$\int_{r_0}^r \frac{n(x)}{x}\,dx < r^{\rho+\varepsilon}\,, \qquad r_0 > 0\,. \tag{4}$$

C' est l'inégalité déjà rencontrée deux fois (nºˢ 5 et 12). Elle entraîne

$$n(r) < r^{\rho+\varepsilon}\,, \qquad r > r(\varepsilon)\,,$$

donc aussi, les α_n étant les zéros non nuls,

$$n < |\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}$$

ou encore

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+2\varepsilon}} < \frac{1}{n^{1+\eta}}\,, \qquad 1+\eta = \frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon} > 1\,.$$

Comme ε est arbitraire, on voit que

Pour une fonction d'ordre fini ρ, la série formée avec les inverses des modules des zéros élevés à une puissance supérieure à ρ est convergente.

Si $\rho(r)$ est un ordre précisé, l'inégalité (4) est remplacée par

$$\int_{r_0}^r \frac{n(x)}{x}\,dx < [1 + o(1)]\,r^{\rho(r)}$$

et on a vu qu'il en résulte (nº 7)

$$n(r) < [1 + o(1)]\rho e r^{\rho(r)} .$$

La recherche des cas où la série $|\alpha_n|^{-\rho}$ converge a conduit à distinguer deux classes de fonctions d'ordre ρ. Considérons l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{1+\rho}} dr ,$$

et convenons de dire que la fonction est de la *classe convergente* si cette intégrale converge, de la *classe divergente* si elle diverge [8]. En multipliant les membres extrêmes de (3) par $\frac{dr}{r^{1+\rho}}$ et intégrant de r_0 à ∞, on voit que, pour une fonction de la classe convergente,

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\rho}} \int_{r_0}^{r} \frac{n(x)}{x} dx \tag{5}$$

converge. En intégrant par parties, on en déduit que l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{n(x)\, dx}{\rho x^{1+\rho}} \tag{6}$$

est aussi convergente. Car l'intégration par parties de (5) où l'intégrale extérieure est prise entre r_0 et R donne

$$\frac{1}{\rho} \int_{r_0}^{R} \frac{n(x)}{x} \left(\frac{1}{x^{\rho}} - \frac{1}{R^{\rho}}\right) dx > \frac{1}{\rho} \int_{r_0}^{\frac{R}{2}} \frac{n(x)\, dx}{x^{1+\rho}} (1 - 2^{-\rho}) .$$

Or, on vérifie de suite que l'intégrale (6) et la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^{\rho}} \tag{7}$$

convergent et divergent simultanément. Par suite:

Si la fonction est de la classe convergente de l'ordre ρ, la série (7) formée avec les modules des zéros est convergente [9].

19. *Théorème d'Hadamard-Carathéodory sur la partie réelle. Décomposition en facteurs des fonctions d'ordre inférieur à un.*

Rappelons d'abord le

Lemme de Schwarz. — Si la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < R$, si $f(0) = 0$ et si dans le cercle considéré $|f(z)| < M$, on a dans ce cercle

$$|f(z)| \leqslant M \frac{|z|}{R},$$

l'égalité n'étant possible que si $f(z)$ est un monôme linéaire.

C'est une conséquence du théorème de Cauchy sur le module maximum, appliqué à $\dfrac{f(z)}{z}$.

Considérons alors une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < R$, nulle pour $z = 0$ et supposons que, dans ce cercle, sa partie réelle soit inférieure à un nombre A, qui est nécessairement positif, car exp. A est le maximum du module de la fonction exp. $f(z)$ dont le module est 1 à l'origine. (On suppose évidemment que $f(z) \not\equiv 0$). Les valeurs $Z = f(z)$ appartiennent au demi-plan $X = RZ < A$. Faisons la représentation conforme de ce demi-plan sur le cercle $|\xi| < 1$, le point $Z = 0$ donnant $\xi = 0$ et la direction positive de l'axe réel étant conservée. Elle est donnée par

$$\xi = \frac{Z}{2A - Z}$$

et transforme $Z = f(z)$ en la fonction $\xi = f(z)/[2A - f(z)]$, holomorphe pour $|z| < R$, nulle à l'origine et de module au plus égale à 1. D'après le lemme de Schwarz, on a $|\xi| \leqslant |z| \dfrac{1}{R}$ l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\xi = \omega \dfrac{z}{R}$, $|\omega| = 1$. Or

$$f(z) = \frac{2A\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \theta(z)\frac{z}{R}, \qquad |\theta(z)| \leqslant 1 ;$$

on a donc

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{R - |z|}, \tag{8}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\xi = \omega \dfrac{z}{R}$. C'est l'inégalité de Carathéodory, qui complète et précise un théorème antérieur d'Hadamard.

Supposons alors que $f(z)$ soit une fonction entière et que, pour $|z| = r$ assez grand, on ait max. $R\,f(z) = o\,(r^k)$, k étant un nombre fixe. Appliquons l'inégalité (8) à $f(z) - f(0)$ en prenant $\mathrm{R} = 2r$, on aura

$$|f(z)| < |f(0)| + 2\left(o\left((2r)^k\right) + |f(0)|\right)$$

ce qui montre en utilisant les inégalités de Cauchy (n° 1), que $f(z)$ est un polynôme inférieur à k. Ainsi

Si f (z) *est une fonction entière et si max.* R f (z) $= o\,(\mathrm{r}^k)$, f (z) *est un polynôme de degré moindre que* k (Hadamard).

Considérons alors une fonction entière $f(z)$ (une vraie fonction entière) d'ordre ρ inférieur à 1. Si elle a une infinité de zéros α_n, la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|} \tag{9}$$

est convergente d'après le théorème du n° 18. Le produit infini formé avec les zéros non nuls

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

est convergent. S'il y a à l'origine un zéro d'ordre q, la fonction

$$g(z) = z^q \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

a les mêmes zéros que $f(z)$ avec les mêmes ordres de multiplicité. Le quotient $f(z)/g(z)$ est une fonction entière sans zéros, donc une exponentielle, exp. $h(z)$, $h(z)$ étant une fonction entière ou un polynôme. Nous allons montrer que $h(z)$ est une constante en montrant que sa partie réelle est bornée par $o\,(r)$. Il résultera bien du théorème d'Hadamard qui vient d'être établi que $h(z)$ est une constante. Ecrivons avec E. Landau

$$e^{h(z)} = \frac{f(z)}{z^q \prod_{1}^{m}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)} \quad \frac{1}{\prod_{m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)} \tag{9'}$$

en supposant $|z| = r$ très grand et prenant m tel que $|\alpha_m| \leqslant 2r$, $|\alpha_{m+1}| > 2r$. Au second membre de (9′), le premier terme est une fonction entière, le maximum de son module pour $|z| = r$ est inférieur au maximum de ce module pour $|z| = 4r$; or pour $|z| = 4r$, on a $\frac{z}{\alpha_n} \geqslant 2$, le dénominateur est supérieur à 1 et au numérateur $\mathrm{M}(4r) < e^{(4r)^{\rho+\varepsilon}}$, avec $\rho + \varepsilon < 1$ si ε est assez petit. Le logarithme du module du premier facteur du second membre est donc égal à $o(r)$. Dans le second facteur $\left|\frac{z}{\alpha_n}\right|$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$ et si $0 < v < \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1 - v} < 1 + 2v < e^{2v} .$$

Le logarithme du module du second facteur du second nembre de (9′) est donc moindre que

$$2r \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|}$$

et le reste de la série convergente tendant vers zéro, cette borne est encore $o(r)$. On a

$$\max \mathrm{R}\, h(z) = o(r) ,$$

$h(z)$ est une constante. Ainsi, comme la démonstration vaudrait encore si la fonction n'avait qu'un nombre fini de zéros et conduirait à la conclusion que cette fonction est un polynôme, on voit que

Une vraie fonction entiére f (z) *d'ordre fini* ρ *inférieur à 1 possède une infinité de zéros* α_n *et peut être décomposée en facteurs sous la forme*

$$f(z) = \mathrm{C}\, z^q \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \tag{10}$$

De ce résultat, on déduirait le théorème général d'Hadamard sur la décomposition en facteurs des fonctions entières d'ordre fini quelconque [10)].

Le résultat s'étend aux fonctions de la classe convergente de l'ordre 1. Car, pour une telle fonction, la série (9) converge, et d'autre part

$$\frac{1}{2}\log M(r) < \int_r^\infty \frac{\log M(x)}{x^2}\,dx = o(1)\,.$$

Dans tous ces cas, le produit figurant dans (10) est un produit canonique P (z) de genre 0, la fonction $f(z)$ est dite de genre 0.

20. *Maximum du module d'un produit canonique de genre* 0.

Si la série (9) converge et si l'on pose $|\alpha_n| = r_n$, on a

$$|P(z)| = \left|\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)\right| \leqslant \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_n}\right), \qquad r = |z|\,.$$

Désignons désormais par $M(r, f)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$. Nous aurons

$$\log M(r, P) \leqslant \sum_1^\infty \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right). \tag{11}$$

La série du second membre peut être remplacée par une intégrale. Si $r(y)$ est une fonction égale à r_{n+1} lorsque $n \leqslant y < n + 1$, c'est

$$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{r}{r(y)}\right) dy\,.$$

On pourrait intégrer par parties. Mais on peut aussi écrire le second membre de (11) sous la forme

$$\sum_1^\infty [n - (n-1)] \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) = \sum_1^n n\left[\log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) - \log\left(1 + \frac{r}{r_{n+1}}\right)\right] \tag{12}$$

car, la série (9) étant convergente et à termes non croissants, le rapport n/r_n tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. On peut écrire

$$\log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) - \log\left(1 + \frac{r}{r_{n+1}}\right) = \int_{r_n}^{r_{n+1}} d\left(-\log\left(1 + \frac{r}{x}\right)\right) = \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{r\,dx}{x(x + r)}$$

et le second membre de (12) est alors égal à

$$\int_0^\infty \frac{r\,n\,(x)}{x\,(x+r)}\,dx\,.$$

Donc

$$\log \mathrm{M}\,(r,\,\mathrm{P}) \leqslant \int_0^\infty \frac{r\,n\,(x)}{x\,(x+r)}\,dx\,, \tag{13}$$

l'égalité ayant lieu lorsque les zéros sont réels et négatifs. D'après (10) on voit que, pour une fonction d'ordre ρ inférieur à 1, ou pour une fonction d'ordre 1 de la classe convergente, on a

$$\log \mathrm{M}\,(r,\,f) < \int_0^\infty \frac{r\,n\,(x)\,dx}{x\,(x+r)} + \mathrm{O}\,(\log r)\,. \tag{14}$$

Si on se donne à priori la fonction (10), la série (9) étant convergente, l'inégalité (14) est aussi valable. Supposons la série (7) convergente, avec $\rho < 1$. Multiplions les deux membres de (14) par $\dfrac{dr}{r^{1+\rho}}$ et intégrons de $r_0 > 0$ à R, en mettant dans l'intégrale du second membre de (14) la limite r_0 au lieu de 0, ce qui ne change rien par suite de la présence de O (log r). Nous obtenons

$$\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{\log \mathrm{M}\,(r,\,f)}{r^{1+\rho}}\,dr < \int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{dr}{r^\rho} \int_{r_0}^\infty \frac{n\,(x)\,dx}{x\,(x+r)} + \mathrm{O}\,(1)\,. \tag{15}$$

Comme $\displaystyle\int_{r_0}^\infty \frac{n\,(x)\,dx}{x^2}$ converge (n° 18), l'intégrale intérieure dans (15) converge uniformément quel que soit r positif, on peut intervertir l'ordre des intégrations et poser ensuite $r = tx$ de telle sorte que l'intégrale du second membre de (15) devient

$$\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{n\,(x)}{x^{1+\rho}}\,\Phi\,(x)\,dx\,,\quad \Phi\,(x) = \int_{\frac{r_0}{x}}^{\frac{\mathrm{R}}{x}} \frac{dt}{(1+t)\,t^\rho} < \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\,t^\rho} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\,.$$

Par hypothèse, la première intégrale, où $\Phi(x)$ est remplacé par une constante, converge lorsque $R \to \infty$. Le premier membre de (15) est borné, $f(z)$ est de la classe convergente. Il s'ensuit, compte tenu du résultat du nº 18, que

I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ inférieur à un soit de la classe convergente est que la série (7) converge.*

Pour une fonction d'ordre inférieur à 1, la série (7) et l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^{1+\rho}}\, dr$$

convergent ou divergent simultanément.

Supposons maintenant que ρ étant inférieur à 1, et $\rho(r)$ vérifiant les conditions de l'ordre précisé, on ait

$$n(r) < BU(r), \quad U(r) = r^{\rho(r)}, \tag{16}$$

B étant une constante finie. Si k est pris supérieur à 1, on a, d'après un calcul déjà fait

$$\int_0^{\frac{r}{k}} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < \int_0^{\frac{r}{k}} \frac{n(x)\,dx}{x} < \frac{B + o(1)}{k^{\rho}\rho} U(r). \tag{17}$$

D'autre part, si α est compris entre ρ et 1, $\rho(x)$ est inférieur à α si x est assez grand et $x^{\rho(x)-\alpha}$ est alors décroissant, donc

$$\int_{kr}^{\infty} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < r\int_{kr}^{\infty} \frac{B\,x^{\rho(x)-\alpha}\,dx}{x^{2-\alpha}} < B\,(rk)^{\rho(kr)-\alpha}\, r \int_{kr}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{B + o(1)}{(1-\alpha)\,k^{1-\rho}} U(r). \tag{18}$$

D'autre part,

$$\int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < n(kr)\left[\log \frac{x}{x+r}\right]_{\frac{r}{k}}^{kr} = n(kr)\log k, \tag{19}$$

et

$$\int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{r\,\mathrm{U}(x)\,dx}{x(x+r)} \sim \int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{r\,x^{\rho(r)}\,dx}{x(x+r)} = \mathrm{U}(r) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{t^{\rho(r)-1}\,dt}{1+t} \sim \mathrm{U}(r) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{t^{\rho-1}\,dt}{1+t} =$$

$$= \mathrm{U}(r)\left[\frac{\pi}{\sin \pi\rho} + \frac{o(k)}{k}\right] \qquad (20)$$

lorsque k est très grand. De ces inégalités, on déduit les résultats suivants:

II. *Si* f (z) *est d'ordre* $\rho < 1$ *et d'ordre précisé* ρ (r), *on peut associer aux nombres* r *pour lesquels log M* (r, f) $> [1 - o(1)]\,\mathrm{U}(\mathrm{r})$ *des nombres* R = kr, *où* k *est suffisamment grand, pour lesquels* n (R) > KU (R), K *dépendant de k, dès que* $\mathrm{R} > \mathrm{R}_0$ [11].

Car, d'après le nº 18, l'inégalité (15) est vérifiée avec $\mathrm{B} > \rho e$ dès que r est assez grand; on peut alors prendre k assez grand pour que les derniers membres dans (17) et (18) soient inférieurs à $\frac{1}{4}\mathrm{U}(r)$; alors d'après (14) et (19), on a

$$n(\mathrm{R}) \log k > \frac{1}{4}\mathrm{U}(r) > \frac{1}{5} k^{-\rho}\,\mathrm{U}(\mathrm{R})$$

dès que R est assez grand.

En rapprochant de l'inégalité du nº 18, en remarquant que $\mathrm{U}(\mathrm{R}) > (1 - o(1)) \log \mathrm{M}(\mathrm{R}, f)$ et en considérant les zéros de $f(z) - \mathrm{Z}$ où Z est un nombre arbitraire de module inférieur à R, ce qui ne modifie pas les inégalités, on voit que

III. *Si* f (z) *est d'ordre* $\rho < 1$, *il existe une suite de couronnes* $\lambda \mathrm{R_m} < |\mathrm{z}| < \mathrm{R_m}$ *où* λ *est un nombre convenable inférieur à 1 et où* $\lim_{\mathrm{m}=\infty} R_{\mathrm{m}} = \infty$ *dans chacune desquelles le nombre des zéros de* f (z) — Z, *où* $|\mathrm{Z}| < \mathrm{R_m}$ *est compris entre*

$$\lambda' \log \mathrm{M}(\mathrm{R}_m, f) \quad \text{et} \quad \lambda'' \log \mathrm{M}(\mathrm{R}_m, f)$$

λ' *et* λ'' *étant des nombres positifs finis. On a d'ailleurs*

$$\log \mathrm{M}(\mathrm{R}_m, f) > \lambda''' \,\mathrm{U}(\mathrm{R}_m)\,.$$

Ceci se précise dans les cas de régularité:

IV. *Si* $\rho < 1$ *et* $\rho(\mathrm{r})$ *un ordre précisé de* $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ *et si, à partir d'une valeur* r, *on a*

$$\log \mathrm{M}(r, f) > \mathrm{DU}(r), \qquad \mathrm{D} > 0,$$

le nombre des zéros de $\mathrm{f}(\mathrm{z}) - \mathrm{Z}$, $|\mathrm{Z}| < \mathrm{r}$, *inférieurs en module à* r *est compris entre* $\mathrm{h}\,\mathrm{U}(\mathrm{r})$ *et* $(1+\varepsilon)\,\rho e\,\mathrm{U}(\mathrm{r})$, *où* $\varepsilon > 0$ *arbitraire,* $\mathrm{h} > 0$ *déterminé, et ceci à partir d'une valeur de* r.

Les propositions I, II, III, IV valent pour toutes les fonctions entières d'ordre fini non entier (voir VALIRON, *Lectures on...*, chap. III).

L'égalité (20) dans laquelle on fait croître k avec r, jointe aux inégalités (17) et (18) montre que:

V. *Si* $\rho(\mathrm{r})$ *jouit des propriétés de l'ordre précisé, si* $\rho < 1$ *et si la fonction* $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ *définie par (10) a tous ses zéros réels et négatifs, le nombre des zéros de module inférieur ou égal à* r *étant asymptotiquement égal à* $\mathrm{U}(\mathrm{r})$, *on a*

$$\log \mathrm{M}(r, f) \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\, \mathrm{U}(r).$$

Cette proposition est aussi un cas particulier d'un théorème relatif aux fonctions d'ordre fini non entier à zéros alignés sur une demi-droite, avec $n(r) \sim \mathrm{U}(r)$. Elle comporte un complément, utile dans certaines questions, sur la valeur de $\log f(z)$ dans le plan privé du voisinage angulaire de la demi-droite portant les zéros. Elle admet une réciproque [12)].

21. *Maximum du module des fonctions d'ordre nul.*

De l'inégalité (14) découle à fortiori, puisque $x + r > r$ et $x + r > x$,

$$\log \mathrm{M}(r, f) < \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} + r \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2} + \mathrm{O}(\log r).$$

En comparant à l'inégalité (3) de Jensen, on voit que, pour les fonctions d'ordre inférieur à 1 (et pour les fonctions d'ordre 1 de la classe convergente), on a

$$\log \mathrm{M}(r, f) = \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} + \theta\, r \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2} + \mathrm{O}(\log r), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (21)$$

Considérons d'abord la classe de fonctions d'ordre nul telles que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{(\log r)^2} < \infty . \tag{22}$$

qui, d'après le n° 15 sont caractérisées par la condition

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n^2]{A_n} < 1 . \tag{23}$$

Pour ces fonctions, on a, à partir d'une valeur de r,

$$\log M(r, f) < B (\log r)^2 ,$$

B étant fini, d'où l'on déduit, si $\lambda > 1$,

$$(\lambda - 1)\, n(r) \log r < \int_r^{r^\lambda} \frac{n(x)\, dx}{x} < B\, \lambda^2 (\log r)^2 ,$$

donc

$$n(r) < B' \log r , \qquad B' < 4B . \tag{24}$$

Il s'ensuit que

$$\int_r^\infty \frac{n(x)\, dx}{x^2} < B' \int_r^\infty \frac{\log x}{x^2}\, dx = B' \frac{\log r + 1}{r}$$

donc

$$\log M(r, f) = \int_0^r \frac{n(x)\, dx}{x} + O(\log r) \tag{25}$$

et, à fortiori,

$$\log M(r, f) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx . \tag{26}$$

D'ailleurs le calcul de la borne du second membre de (26) lorsque (24) a lieu, montre que (22) est alors vérifiée. Ainsi

I. *Pour toute fonction entière* f (z) *vérifiant l'une des conditions équivalentes (22), ou (23), ou*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\log r} < \infty ,$$

on a l'égalité (26).

Si l'on désigne d'une façon générale par $n(x, Z)$ le nombre des zéros non nuls de $f(z) - Z$ dont le module est inférieur ou égal à x et si l'on pose

$$N(r, Z) = \int_0^r \frac{n(x, Z)}{x} dx ,$$

on voit que, pour cette classe de fonctions vérifiant (22), on a

$$\log M(r, f) \sim N(r, Z) ,$$

quel que soit Z fini. *La moyenne* N (r, Z) *de Jensen a la même valeur asymptotique quel que soit* Z.

Lorsque $\log M(r, f)$ sera tel que l'on puisse déduire de (26) une valeur asymptotique de $n(r)$, les fonctions $n(r, Z)$ auront toutes la même valeur asymptotique qui sera asymptotiquement égale au rang $\nu(r)$ du terme maximum de la série de Taylor de $f(z)$. Ce sera le cas lorsque la condition (22) du n° 15 sera vérifiée avec $k < 2$ ou avec $k = 2$ et $k(X) \leqslant 2$. On peut remarquer que, dans ces conditions, on a

$$\log M(r, f) \sim \frac{n(r) \log r}{k} , \qquad k \sim \frac{\log_2 M(r, f)}{\log_2 r} \sim \frac{\log(n(r) \log r)}{\log_2 r} .$$

On peut chercher à déterminer toutes les fonctions pour lesquelles on a la première égalité ($k \geqslant 1$) ou celles obtenues en y remplaçant k par l'une de ses valeurs asymptotiques. Ce sont ces recherches, et celles analogues lorsque (22) n'a plus lieu, qui conduisent aux classifications dont il a été question au n° 10. Pour les fonctions à croissance plus lente que celles considérées au n° 15, on a $k = 1$ et les fonctions régulières sont celles pour lesquelles

$$V(X) = \log M(r, f) \sim \int_1^X \varpi(t)\, dt \sim X\varpi(X) , \qquad \varpi(X) = n(e^X) .$$

En désignant l'intégrale par W (X), on doit avoir

$$W(X) \sim XW'(X) ,$$

donc

$$\frac{W'}{W} \sim \frac{1}{X} , \qquad V(X) \sim W(X) = X^{1+\delta(X)} , \qquad \lim_{X=\infty} \delta(X) = 0 .$$

De la convexité de W (X) résulte que $X^{\delta(X)}$ est croissante dès que X est assez grand. Comme $\delta(X)$ tend vers zéro, ajoutons la condition qu'il décroisse. Alors, si

$$V(X) \sim X^{1+\delta(X)}, \qquad \delta(X) \downarrow 0, \qquad \delta(X) \log X \uparrow \infty$$

on a

$$w(X) \sim X^{\delta(X)}.$$

Car

$$V(X) \sim W(X) < Xw(X), \qquad \text{donc} \qquad w(X) > \frac{V(X)}{X}$$

et

$$(X' - X)\, w(X) < (1 + o(1))\,(X')^{1+\delta(X')} < (1 + o(1)]\,(X')^{1+\delta(X)}.$$

En prenant $\log X' = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta(X) \log X}\right) \log X$, on obtient $w(X) < (1 + o(1))\, e^{\varepsilon}\, X^{\delta(X)}$, ce qui achève la démonstration.

A toute fonction $f(z)$ pour laquelle $\log V(X)/\log X$ tend vers un, on peut associer une fonction $\delta(X)$ telle que $\delta(X) \downarrow 0$, $\delta(X) \log X \uparrow \infty$ et

$$\varlimsup_{X=\infty} \frac{V(X)}{X^{1+\delta(X)}} = 1,$$

ce qui permet des approximations asymptotiques.

II. *Pour toute fonction d'ordre nul pour laquelle (22) n'est pas vérifiée, il existe encore une suite infinie de valeurs indéfiniment croissantes de* r *pour lesquelles l'égalité (26) a lieu.*

Cet énoncé est une partie du théorème de Littlewood qui sera donné au n° 24. Pour l'établir, il suffit, d'après (21), de montrer que, pour toute fonction d'ordre nul,

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{r\displaystyle\int_r^{\infty} \frac{n(x)}{x^2}\, dx}{\displaystyle\int_0^{r} \frac{n(x)}{x}\, dx} = 0. \tag{27}$$

Supposons le contraire, le numérateur dans (27) serait supérieur au produit d'un nombre positif h par le dénominateur que nous désignerons par N (r). On aurait donc, en intégrant par parties au second membre,

$$hN(r) < r\int_r^\infty N'(x)\frac{dx}{x} = -N(r) + r\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2}$$

ou

$$(h+1)N(r) < r\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2} = rN_1(r)$$

et enfin

$$(h+1)rN_1'(r) + N_1(r) > 0 , \qquad \frac{N_1'}{N_1} + \frac{1}{h+1}\frac{1}{r} > 0 .$$

Ainsi la fonction

$$N_1 r^{\frac{1}{h+1}}$$

serait croissante, donc

$$\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2} > K r^{-\frac{1}{1+h}}$$

ce qui impliquerait que le produit $N(x)\,x^{-\frac{h}{1+h}}$ ne tendrait pas vers zéro; pour une suite de r tendant vers l'infini, on aurait

$$N(r) > K_1 r^{\frac{h}{1+h}}$$

et d'après la formule de Jensen, la fonction serait au moins d'ordre $\dfrac{h}{1+h}$.

Il s'ensuit que toutes les fois que $n(x)$ sera assez régulier, on aura

$$\lim_{r=\infty}\frac{r\int_r^\infty n(x)\,dx/x^2}{\int_r^\infty n(x)\,dx/x} = 0 \tag{28}$$

et (26) aura lieu. Par exemple, pour les fonctions vérifiant la condition (22) du nº 15, on voit que le numérateur de l'expression (28) est

$$O(1)\,n(r) = O(1)\,X^{k(X)-1} ;$$

il suffit même que l'on ait seulement

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{X^{k(X)}} = 1$$

ce qui donne une majoration analogue du coefficient de θ dans (21), et que

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{X^{k(X)-1}} = \infty .$$

(à suivre).

NOTES

[3]) Voir HADAMARD, J.: Sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **135**, pp. 1309-1311 (1902), et VALIRON G.: Sur le nombre des singularités transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200**, pp. 713-715 (1935).

[4]) Voir VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière (thèse, Paris, Ed. Privat, Toulouse, 1912, paru dans *Annales Toulouse* (3), **5**, pp. 117-257 (1914); à ces résultats on comparera ceux de OSTROWSKI, A.: Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent, *Acta Mathematica*, **72**, pp. 99-257 (1940-1941), notamment les pp. 107, 110, 158, 166, 170 et 173, et OSTROWSKI, A.: Addition à notre mémoire: « Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent », *Acta Mathematica*, **75**, pp. 183-186 (1943), ainsi que ceux de REY PASTOR, J.: Lecciones de Algebra, pp. 89-105, 2ᵉ édition, Madrid, 1935, et SAN JUAN, R.: Compléments à la méthode de Graeffe pour la résolution des équations algébriques, *Bull. des Sci. Math.* (2), LIX, pp. 104-109 (1935), et: Complementos al método de Gräffe para la resolución de ecuaciones algébricas, *Revista Mat. Hispano-Americ.* (3), I, pp. 1-14 (1939), ainsi que: A propos du mémoire: « Recherches sur la méthode de Graeffe..., etc » par Alexandre OSTROWSKI, à Bâle, *Acta mathematica*, **75**, pp. 187-190 (1943).

[5]) Voir VALIRON, G.: Théorie des fonctions (p. 388). Masson, Paris, 1942.

[6]) Voir BRINKMEIER, H.: Ueber das Mass der Bestimmtheit des Wachstums einer ganzen transzendenten Funktion durch die absoluten Beträge der Koeffizienten ihrer Potenzreihe. *Math. Annalen*, **96**, pp. 108-118 (1927).

[7]) Voir VALIRON, G.: Sur la croissance des fonctions entières. *C. R. Assoc. française avanc. des Sci.*, Le Havre, 1929, pp. 110-113.

[8]) Pour l'introduction de ces notions dans la théorie des fonctions entières, voir VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre fini. *Bull. des Sciences math. (Darboux Bull.)* (2), **45**, pp. 258-270 (1921). La terminologie adoptée ici a été proposée par R. NEVANLINNA qui a étendu les résultats aux fonctions méromorphes.

[9]) On trouve dans VALIRON, G.: Lectures on the general theory of integral functions, Ed. Privat, Toulouse, 1928, Appendix B, p. 182, l'étude de la condition pour qu'une fonction donnée par sa série de Taylor soit de la classe divergente ou convergente.

[10]) Voir VALIRON, G.: *loc. cit.*, [5]), p. 432.

[11]) On a donc $n > |\alpha_n|^{\rho-\varepsilon}$
pour une suite infinie de n, ce qii entraîne la divergence

de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^{\rho-\varepsilon}}$ pour $\varepsilon > 0$,

de sorte que l'on a $\varlimsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\log |\alpha_n|} = \rho$, c'est le théorème de Borel.

[12]) Voir VALIRON, G.: *loc. cit*, [4]). La réciproque a été retrouvée par TITCHMARCH, E. C.: On integral functions with real negative zeros, *Proc. London Math. Soc.* (2), **26**, pp. 185-200 (1927), dans le cas $U(r) = kr^{\rho}$ (voir TITCHMARCH, E. C.: The theory of functions, 2nd edition, x-452 pages, Oxford University Press, 1939). Dans une série de travaux récents (DELANGE, H.: Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs, *J. de Math. pures et appl.*, **31**, pp. 55-78 (1952)), H. DELANGE a repris ces questions et a étudié le cas de l'ordre entier. Voir aussi un mémoire de M. HEINS, M.: Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues. *Annals of Math.*, **49**, pp. 200-213 (1948).