8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^l$, h

$$\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7,9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} \mathrm{L} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, \partial_{\dot{k}} \varphi - h\, \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\,.$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} \mathrm{L}\, dx^k\,.$$

Autrement dit, elles sont extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)\, du \tag{7.10}$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible [3].

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{\mathrm{V}}_4$.

Nous supposons que la variété $\overline{\mathrm{V}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{8.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

---

3) Voir A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.

Nous supposons que $\bar{g}_{00}$ ne s'annule pas dans le domaine étudié. Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00}\dot{x}^0 + \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathcal{L} \tag{8.2}$$

et à éliminer $\dot{x}^0$ entre cette équation et

$$\mathrm{L} = \mathcal{L} - h\dot{x}^0 . \tag{8.3}$$

En décomposant $\mathcal{L}^2$ en carrés à partir de la variable directrice $\dot{x}^0$, il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i}\,\bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = h\mathcal{L}$, on tire l'équation

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}{1 - \dfrac{h^2}{\bar{g}_{00}}}} \tag{8.4}$$

qui fournit $\mathcal{L}$ en fonction des variables x^k, $\dot{x}^l$, h. De (8. 2), on tire ensuite

$$\dot{x}_0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}}\mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} . \tag{8.5}$$

On en déduit d'après (8. 3) et en vertu de (8. 4)

$$\mathrm{L} = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right)\hat{\bar{g}}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j} + h\frac{\bar{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \tag{8.6}$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$.

L est bien une fonction de x^k, $\dot{x}^l$, h homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^l$. Elle définit sur la variété quotient $\bar{\mathrm{V}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\bar{\mathrm{V}}_3$ la fonction L $(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathcal{L}\,(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$

homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$, qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} \,.$$

Les courbes extrêmales correspondantes sont donc des géodésiques de $\overline{V}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\overline{V}_4$ qui correspondent à l'intégrale première $\partial_{\dot{0}}\mathcal{L} = h$ se projettent sur la variété quotient $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(-\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} + h \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du \tag{8.7}$$

où h a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du \,. \tag{8.8}$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de $\dot{x}^0$:

$$dx^0 = \frac{h}{\overline{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}} \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i dx^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, dx^i}{\overline{g}_{00}} \,. \tag{8,9}$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathcal{L} \to 0$. De la relation $h\mathcal{L} = \overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$, il résulte que $h \to \infty$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$ et h a le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \,.$$

On en déduit que $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (8. 8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ sur $\overline{V}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h \to \infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du\,.$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

LEMME. — *Les géodésiques de longueur nulle de* $\overline{V}_4$ *se projettent sur* $\overline{V}_3$ *selon les extrêmales de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du \tag{8.10}$$

où ε *est le signe de* $\bar{g}_{00}$ *et* ε' *le signe de* $\bar{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$dx^0 = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}}\,. \tag{8.11}$$

On remarquera que $dx^0 = \mathrm{L}du$.

Dans le cas où $\bar{g}_{00}$ s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}\, du$$

et

$$dx^0 = - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}\, du\,.$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que* $\bar{g}_{00} \neq 0$, *les rayons électromagnétiques dans*